

Análise em Regime Permanente de um Algoritmo NLMS de Passo Variável

Eduardo Vinicius Kuhn, José Gil Fausto Zipf e Rui Seara

Resumo—Este artigo foca sobre a análise em regime permanente de um algoritmo VSS-NLMS (*variable step-size normalized least-mean-square*) da literatura, o qual usa uma regra de ajuste para o passo de adaptação com imunidade elevada ao ruído de medição. Especificamente, expressões de modelo são derivadas visando prever o erro quadrático médio em excesso (EQME) como também o valor médio e o valor quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente. Com base nas expressões de modelo, algumas características importantes sobre o comportamento do algoritmo são discutidas. Resultados de simulação são apresentados confirmando a precisão das expressões de modelo obtidas.

Palavras-chave—Algoritmo NLMS de passo variável, filtragem adaptativa, modelagem estocástica.

Abstract—This paper focuses on the steady-state analysis of a variable step-size normalized least-mean-square (VSS-NLMS) algorithm from the literature, which uses a step-size adjustment rule with high immunity against the measurement noise. Specifically, model expressions are derived aiming to predict the excess mean-square error (EMSE) as well as the mean and mean squared step-size values in steady state. Based on the model expressions, some important characteristics of the algorithm are discussed. Simulation results are presented confirming the accuracy of the obtained model expressions.

Keywords—Variable step-size NLMS algorithm, adaptive filtering, stochastic modeling.

I. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, algoritmos adaptativos de passo variável baseados no LMS (*least-mean-square*) têm emergido como uma solução atrativa do ponto de vista prático, visando tratar a relação de compromisso entre velocidade de convergência e erro quadrático médio em excesso (EQME) em regime permanente [1]. A ideia central desses algoritmos é utilizar um valor de passo grande no início do processo de adaptação, visando propiciar uma convergência inicial rápida. Então, conforme o algoritmo tende para a condição de regime permanente, o valor do passo é gradualmente reduzido (de acordo com alguma regra de ajuste predefinida), levando a um pequeno EQME em regime permanente. Diversas abordagens vêm sendo discutidas na literatura para derivar regras de ajuste para o passo de adaptação, as quais são baseadas, por exemplo, na teoria do passo ótimo [2]-[5], no gradiente do erro quadrático instantâneo [6]-[8], na autocorrelação do erro [9], no próprio erro quadrático instantâneo [10], na restrição da variância do ruído [11], no valor absoluto do erro instantâneo [12], dentre outras abordagens dadas em [13]-[15].

De modo geral, as regras de ajuste de passo mencionadas

Eduardo Vinicius Kuhn, José Gil Fausto Zipf e Rui Seara, LINSE - Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil (e-mails: kuhn@linse.ufsc.br, gil@linse.ufsc.br e seara@linse.ufsc.br).

Eduardo Vinicius Kuhn é também Professor do Curso de Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, PR, Brasil (e-mail: kuhn@utfpr.edu.br).

José Gil Fausto Zipf é também Professor do Departamento de Engenharia Elétrica e Telecomunicações da Universidade Regional de Blumenau (FURB), Blumenau, SC, Brasil (e-mail: gilzipf@furb.br).

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

sofrem interferência (em maior ou menor grau) do ruído de medição, uma vez que o passo variável é frequentemente computado usando o sinal de erro corrompido por ruído. Como consequência, o desempenho de algoritmos de passo variável é significativamente degradado, resultando em um aumento do EQME em regime permanente. Tal comportamento se torna ainda mais evidenciado em ambientes com baixa razão sinal-ruído (SNR). Outro problema é que a maioria das regras de ajuste do passo de adaptação introduzidas na literatura requerem a sintonia de um ou mais parâmetros para operação adequada, o que é usualmente realizado através de um procedimento tedioso de tentativa e erro. Além disso, visto que tal sintonia é em geral afetada pela SNR do sistema, os parâmetros dos algoritmos precisam ser reajustados para manter um desempenho adequado sempre que as condições de operação mudam (para detalhes, veja [16]).

Recentemente, visando superar as limitações observadas, uma regra de ajuste do passo de adaptação foi apresentada em [16], a qual é baseada na autocorrelação do erro. De acordo com os autores, a regra de ajuste obtida tem elevada imunidade contra o ruído de medição e depende apenas da escolha de um único parâmetro de suavização para sua operação. Contudo, tendo em vista que o desempenho e a robustez desse algoritmo foram avaliados somente via simulações de Monte Carlo (MC), é imperativo realizar um estudo mais abrangente a fim de fornecer uma fundamentação teórica mais rigorosa, clarificar algumas características e discutir como o parâmetro de suavização afeta seu desempenho. Nesse sentido, um caminho conveniente para melhor entender o comportamento de um dado algoritmo se dá através de seu modelo estocástico.

Neste contexto, focando sobre o algoritmo VSS-NLMS (*variable step-size normalized least-mean-square*) introduzido em [16], o presente trabalho de pesquisa tem por objetivo:

- i) derivar expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo em regime permanente;
- ii) investigar como o parâmetro de suavização impacta sobre o desempenho do algoritmo; e
- iii) estabelecer uma relação entre o parâmetro de suavização e o passo de adaptação do algoritmo NLMS (padrão).

Vale salientar que o presente trabalho estende os resultados apresentados em [17], tratando agora acerca do comportamento do algoritmo em regime permanente.

II. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Na análise apresentada, assume-se que os coeficientes do filtro adaptativo são atualizados por um algoritmo VSS-NLMS, cuja equação de adaptação é dada por [2], [3]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu(n) \frac{\mathbf{x}(n)e(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon} \quad (1)$$

onde $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \ \dots \ w_M(n)]^T$ representa o vetor de coeficientes do filtro, $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ \dots \ x(n-M+1)]^T$, um vetor contendo as amostras mais recentes do sinal de entrada, $\mu(n)$, o passo de adaptação variável, $\varepsilon > 0$, um parâmetro de regularização e $e(n)$, o sinal de erro. Para um problema de identificação de sistema, o sinal de erro é expresso como

$$e(n) = [\mathbf{w}_o - \mathbf{w}(n)]^T \mathbf{x}(n) + z(n) \quad (2)$$

com \mathbf{w}_0 denotando um vetor de dimensão M contendo os coeficientes da planta (sistema a ser identificado) e $z(n)$, um ruído aditivo de medição. Particularmente em [16], a regra de ajuste do passo de adaptação variável $\mu(n)$ é dada por

$$\mu(n) = \frac{p^2(n)}{q^2(n)} \quad (3)$$

com

$$p(n) = \beta p(n-1) + (1-\beta)e(n)e(n-1) \quad (4)$$

e

$$q(n) = \beta q(n-1) + (1-\beta)e^2(n) \quad (5)$$

sendo $0 \ll \beta < 1$ um parâmetro de suavização (para detalhes, veja a discussão realizada na Seção III-C).

III. ANÁLISE PROPOSTA

Nesta seção, tendo em vista o algoritmo VSS-NLMS considerado [dado por (1)-(5)], são derivadas expressões de modelo caracterizando o EQME em regime permanente como também o valor médio e o valor quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente. A partir dessas expressões, algumas características importantes sobre o comportamento do algoritmo são discutidas.

A. EQME em Regime Permanente

Baseado no princípio de conservação de energia [1], uma expressão de modelo caracterizando o EQME em regime permanente $J_{\text{ex}}(\infty)$ é derivada. Para tal, desprezando o parâmetro de regularização ε , (1) é inicialmente reescrita em função do vetor de erro nos coeficientes

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_0 \quad (6)$$

como

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \mu(n) \frac{\mathbf{x}(n)e(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}. \quad (7)$$

Então, calculando $\mathbf{v}^T(n+1)\mathbf{v}(n+1)$ [a partir de (7)], tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, fazendo $n \rightarrow \infty$, considerando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{v}^T(n+1)\mathbf{v}(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{v}(n)] \quad (8)$$

e assumindo que $\mu(n)$ é estatisticamente independente de qualquer outra variável [9], [10], a relação de variâncias para o algoritmo VSS-NLMS é obtida como

$$2E[\mu(\infty)] \lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{ \frac{[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right\} = E[\mu^2(\infty)] \lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{ \frac{e^2(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right\}. \quad (9)$$

Note em (9) que $E[\mu(\infty)]$ e $E[\mu^2(\infty)]$ caracterizam o valor médio e o valor quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente, respectivamente.

Agora, relembando a definição de EQME em regime permanente [1], isto é,

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\{[e(n) - z(n)]^2\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\{[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2\} \end{aligned} \quad (10)$$

considerando que $\mathbf{v}(n)$ e $\mathbf{x}(n)$ são estatisticamente independentes e assumindo que o denominador varia lentamente com respeito ao numerador [18], o termo do lado esquerdo de (9) pode ser aproximado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{ \frac{[\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right\} \cong \frac{J_{\text{ex}}(\infty)}{\text{tr}(\mathbf{R})} \quad (11)$$

onde $\text{tr}(\cdot)$ denota o operador traço de uma matriz e $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$, a matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Adicionalmente, usando (2), (6) e (10) como também

assumindo que $z(n)$ tem média zero, variância σ_z^2 e é não correlacionado com qualquer outro sinal no sistema, o termo do lado direito de (9) pode ser simplificado para

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{ \frac{e^2(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right\} \cong \frac{J_{\text{ex}}(\infty)}{\text{tr}(\mathbf{R})} + \sigma_z^2 E_1 \quad (12)$$

com

$$E_1 = E\left[\frac{1}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right]. \quad (13)$$

No Apêndice, soluções analíticas para computar E_1 são fornecidas, considerando tanto sinal de entrada gaussiano correlacionado quanto não correlacionado [veja (37) e (38)].

Finalmente, substituindo (11) e (12) em (9), e resolvendo a expressão resultante para $J_{\text{ex}}(\infty)$, uma expressão para predizer o EQME em regime permanente do algoritmo VSS-NLMS é obtida como

$$J_{\text{ex}}(\infty) = \frac{\eta}{2-\eta} \sigma_z^2 \text{tr}(\mathbf{R}) E_1 \quad (14)$$

com

$$\eta = \frac{E[\mu^2(\infty)]}{E[\mu(\infty)]}. \quad (15)$$

Consequentemente, o desajuste pode também ser diretamente determinado substituindo (14) em [1, eq. (15.11)].

A partir de (14), as seguintes características podem ser verificadas:

- i) O EQME em regime permanente depende da razão η entre $E[\mu^2(\infty)]$ e $E[\mu(\infty)]$.
- ii) A potência do ruído de medição σ_z^2 e as características estatísticas do sinal de entrada afetam o EQME em regime permanente.
- iii) A expressão de modelo descrevendo o EQME em regime permanente exibe uma formulação similar à obtida para o algoritmo NLMS (padrão) [1, eq. (17.9)], exceto pela troca de μ_{NLMS} por η .
- iv) Para η próximo de zero, valores de EQME em regime permanente pequenos são alcançados, o que analogamente ocorre no algoritmo NLMS (padrão) para $\mu_{\text{NLMS}} \rightarrow 0$.

Visto que a derivação da expressão de modelo (14) não assume qualquer regra de ajuste para o passo de adaptação específica, as características supramencionadas valem para outros algoritmos VSS-NLMS da literatura.

Portanto, levando em conta as soluções fornecidas no Apêndice para computar E_1 , o EQME em regime permanente e o desajuste do algoritmo VSS-NLMS podem ser preditos através da expressão de modelo (14) se $E[\mu^2(\infty)]$ e $E[\mu(\infty)]$ forem conhecidos.

B. Comportamento do Passo em Regime Permanente

Agora, são derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio e quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente [requeridas em (15)].

1) *Determinação de $E[\mu(\infty)]$* : Tomando o valor esperado de ambos os lados de (3), fazendo $n \rightarrow \infty$ e assumindo que $p^2(n)$ varia lentamente com respeito a $q^2(n)$, de tal forma que ambas as variáveis são aproximadamente independentes, o princípio da média [18] pode ser utilizado para obter

$$E[\mu(\infty)] \cong \frac{E[p^2(\infty)]}{E[q^2(\infty)]}. \quad (16)$$

Então, determinando $p^2(n)$ a partir de (4), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, fazendo $n \rightarrow \infty$, usando a definição de erro quadrático médio (EQM) em regime permanente

$$J(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[e^2(n)] \quad (17)$$

considerando [a partir de (4) e (10)] que

$$E[p(\infty)] \cong J_{\text{ex}}(\infty) \quad (18)$$

assumindo que $p(n-1)$ seja independente de $e(n)e(n-1)$ e resolvendo a expressão resultante para $E[p^2(\infty)]$, tem-se

$$E[p^2(\infty)] = \frac{(1-\beta)J^2(\infty) + 2\beta J_{\text{ex}}^2(\infty)}{(1+\beta)}. \quad (19)$$

Analogamente, assumindo que $q(n-1)$ seja independente de $e^2(n)$, a partir de (5) e

$$E[q(\infty)] = J(\infty) \quad (20)$$

segue que

$$E[q^2(\infty)] = \frac{(3-\beta)J^2(\infty)}{(1+\beta)}. \quad (21)$$

Logo, substituindo (19) e (21) em (16), o comportamento médio do passo de adaptação em regime permanente é obtido como

$$E[\mu(\infty)] = \frac{(1-\beta)}{(3-\beta)} + \frac{2\beta J_{\text{ex}}^2(\infty)}{(3-\beta)J^2(\infty)}. \quad (22)$$

Levando em consideração (22), as seguintes características podem ser verificadas:

i) Para $\beta \rightarrow 1$, o valor médio do passo de adaptação em regime permanente é dado por

$$E[\mu(\infty)] \rightarrow \frac{J_{\text{ex}}^2(\infty)}{J^2(\infty)}. \quad (23)$$

ii) Para $\beta < 1$, o valor médio do passo de adaptação em regime permanente tem como limite inferior

$$E[\mu(\infty)] \cong \frac{(1-\beta)}{(3-\beta)} \quad (24)$$

visto que o EQM é usualmente maior do que o EQME em regime permanente frente a condições de operação realísticas. Tal polarização limita a redução do passo de adaptação e, conseqüentemente, o mínimo EQME atingível.

iii) O valor médio do passo de adaptação em regime permanente praticamente não é afetado pelo ruído de medição, confirmando assim a robustez da regra de ajuste do passo de adaptação [dada por (3)-(5)].

2) *Determinação de $E[\mu^2(\infty)]$* : Como em (16), aproxima-se

$$E[\mu^2(\infty)] \cong \frac{E[p^4(\infty)]}{E[q^4(\infty)]}. \quad (25)$$

Agora, calculando $p^4(n)$ a partir de (4), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, fazendo $n \rightarrow \infty$, desprezando novamente a correlação de termos cruzados, considerando (10), (18), (19) e

$$E[p^3(\infty)] = \frac{3(1-\beta)^2[\beta(1-\beta)+3]J^2(\infty)J_{\text{ex}}(\infty) + 6\beta^3J_{\text{ex}}^3(\infty)}{(1+\beta)(1+\beta+\beta^2)} \quad (26)$$

obtem-se após algumas simplificações que

$$\begin{aligned} E[p^4(\infty)] &= \frac{3(1-\beta)(1-\beta^3)[2\beta+3(1-\beta^2)]J^4(\infty)}{(1+\beta)^2(1+\beta^2)(1+\beta+\beta^2)} \\ &+ \frac{12\beta(1-\beta^2)[3(1+\beta^2)+\beta(1-4\beta^2)]J^2(\infty)J_{\text{ex}}^2(\infty)}{(1+\beta)^2(1+\beta^2)(1+\beta+\beta^2)} \\ &+ \frac{24\beta^6J_{\text{ex}}^4(\infty)}{(1+\beta)^2(1+\beta^2)(1+\beta+\beta^2)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Por sua vez, a partir de (5) e

$$E[q^3(\infty)] = \frac{3[\beta^2(\beta-2)-2\beta+5]J^3(\infty)}{(1+\beta)(1+\beta+\beta^2)} \quad (28)$$

tem-se

$$E[q^4(\infty)] = \frac{3\{\beta^4[\beta(9-5\beta)+7]-\beta^2(6\beta+17)+5(7-3\beta)\}J^4(\infty)}{(1+\beta)^2(1+\beta^2)(1+\beta+\beta^2)} \quad (29)$$

Dessa forma, substituindo (27) e (29) em (25), o comportamento quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente é determinado como

$$\begin{aligned} E[\mu^2(\infty)] &= \frac{(1-\beta)(1-\beta^3)[2\beta+3(1-\beta^2)]}{\beta^4[\beta(9-5\beta)+7]-\beta^2(6\beta+17)+5(7-3\beta)} \\ &+ \frac{4\beta(1-\beta)[(1-\beta^2)(1+\beta^3(1+\beta^2))+\beta(1-4\beta^2)]J_{\text{ex}}^2(\infty)}{\{\beta^4[\beta(9-5\beta)+7]-\beta^2(6\beta+17)+5(7-3\beta)\}J^2(\infty)} \\ &+ \frac{8\beta^6J_{\text{ex}}^4(\infty)}{\{\beta^4[\beta(9-5\beta)+7]-\beta^2(6\beta+17)+5(7-3\beta)\}J^4(\infty)}. \end{aligned} \quad (30)$$

A partir de (30), os seguintes pontos podem ser observados:

i) Para $\beta \rightarrow 1$, o valor quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente é dado por

$$E[\mu^2(\infty)] \rightarrow \frac{J_{\text{ex}}^4(\infty)}{J^4(\infty)}. \quad (31)$$

ii) Para $\beta < 1$, o valor quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente tem como limite inferior

$$E[\mu^2(\infty)] \cong \frac{(1-\beta)(1-\beta^3)[2\beta+3(1-\beta^2)]}{\beta^4[\beta(9-5\beta)+7]-\beta^2(6\beta+17)+5(7-3\beta)}. \quad (32)$$

iii) O valor quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente praticamente não é afetado pela variância do ruído de medição, ratificando a robustez da regra de ajuste do passo de adaptação [dada por (3)-(5)].

Portanto, o comportamento médio e quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente pode ser predito através das expressões de modelo (22) e (30), respectivamente. Todavia, frente a condições de operação realísticas [isto é, $\beta < 1$ e $J(\infty) \gg J_{\text{ex}}(\infty)$], $E[\mu(\infty)]$ e $E[\mu^2(\infty)]$ podem ser aproximados por (24) e (32), respectivamente.

C. Discussão

Agora, algumas características importantes oriundas das expressões de modelo (14), (22) e (30) são destacadas, visando evidenciar mais alguns aspectos sobre o comportamento do algoritmo em regime permanente. Para exemplificar, a Fig. 1 mostra o comportamento das expressões de modelo (14), (22) e (30) para diferentes valores de β (compreendendo a faixa de 0,5 até 0,999). Observa-se a partir das Figs. 1(a) e (b) que os valores médio e quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente são funções decrescentes de β . Além disso, infere-se que o valor mínimo do passo de adaptação em regime permanente $E[\mu(\infty)]$ é limitado a um dado valor de β . Por sua vez, verifica-se da Fig. 1(c) que o EQME em regime permanente também é uma função decrescente de β . Assim, β deve ser escolhido próximo de 1 para se obter valores de EQME em regime permanente pequenos. Todavia, escolhendo β muito próximo de 1, a velocidade de convergência do algoritmo como também sua capacidade de reação a mudanças abruptas da planta podem ser prejudicadas [veja (4) e (5)]. Contudo, apesar de existir uma sutil relação de compromisso entre a velocidade de convergência e o EQME em regime permanente (ditada pelo parâmetro β), o desempenho do algoritmo não é significativamente afetado pela escolha de β (na prática, tipicamente $0,85 < \beta < 1$).

Além dos aspectos mencionados, lembre-se que (14) tem a mesma formulação da expressão correspondente obtida para o algoritmo NLMS com passo de adaptação fixo, exceto pela troca da razão η por μ_{NLMS} (veja [1, eq. (17.9)]). Dessa forma, é possível inferir que o algoritmo VSS-NLMS e o algoritmo NLMS (padrão) podem ser ajustados para atingir o mesmo EQME em regime permanente, fazendo-se o valor do passo de adaptação deste último igual a η . Então, visto que η é função de β , uma relação (aproximada) pode ser estabelecida entre o passo de adaptação μ_{NLMS} do NLMS e o parâmetro β do algoritmo VSS-NLMS. Especificamente, substituindo (24) e (32) em (15), e igualando a expressão resultante a μ_{NLMS} , obtém-se

$$\mu_{NLMS} \cong \frac{(3-\beta)(1-\beta^3)[2\beta+3(1-\beta^2)]}{\beta^4[\beta(9-5\beta)+7]-\beta^2(6\beta+17)+5(7-3\beta)}. \quad (33)$$

Logo, um valor de passo de adaptação equivalente para o algoritmo NLMS (padrão) pode ser determinado para um dado valor de β ; assim, ambos os algoritmos podem ser ajustados para alcançar o mesmo EQME em regime permanente, sem o uso de extensivas simulações (veja o Exemplo 2 da Seção IV).

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Agora, visando verificar a precisão das expressões de modelo propostas bem como confirmar algumas características do algoritmo, simulações de MC (média de 200 realizações independentes) são realizadas considerando um problema de identificação de sistemas. Por simplicidade, uma planta com $M=128$ coeficientes obtida de uma função sinc é utilizada, sendo a planta normalizada de tal forma que $\|w_o\|_2^2=1$ [17]. O sinal de entrada é obtido através de um processo autorregressivo de segunda ordem AR(2), dado por

$$x(n) = -a_1x(n-1) - a_2x(n-2) + v(n) \quad (34)$$

onde a_1 e a_2 são os coeficientes do processo AR(2) e $v(n)$, um ruído branco cuja variância é ajustada de tal modo que $\sigma_x^2=1$. A SNR é definida como

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} \right) \quad (35)$$

sendo dois valores práticos aqui considerados, isto é, SNR = 20 dB e SNR = 40 dB. Ainda, as condições iniciais das variáveis do algoritmo são $w(0)=0$, $\mu(0)=0$ e $p(0)=q(0)=0$.

A. Exemplo 1

Neste exemplo, a precisão das expressões de modelo caracterizando o comportamento do algoritmo em regime permanente é avaliada para diferentes valores de β (compreendendo a faixa de 0,5 até 0,999). Para tal, resultados de simulação de MC são comparados com aqueles preditos a partir de (14), (24) e (32). No intuito de fornecer uma melhor visualização para os resultados obtidos experimentalmente, toma-se a média dos últimos 100 valores da variável de interesse em regime permanente (como em [1, pp. 250]).

A Fig. 1 mostra os resultados obtidos por simulações de MC juntamente com aqueles preditos a partir das expressões de modelo (14), (24) e (32). A partir das Figs. 1(a) e (b), observa-se que (24) e (32) caracterizam adequadamente o valor médio e o valor quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente (particularmente, para $\beta > 0,65$). [Como os resultados são similares, simulações para SNR = 20 dB foram omitidas nas Figs. 1(a) e (b).] Por sua vez, verifica-se a partir da Fig. 1(c) que (14) descreve muito bem o EQME em regime permanente do algoritmo para uma ampla faixa de valores de β , como também para ambos os valores de SNR considerados. Adicionalmente, a Fig. 1(c)

mostra que valores de EQME em regime permanente pequenos são alcançados para $\beta \rightarrow 1$.

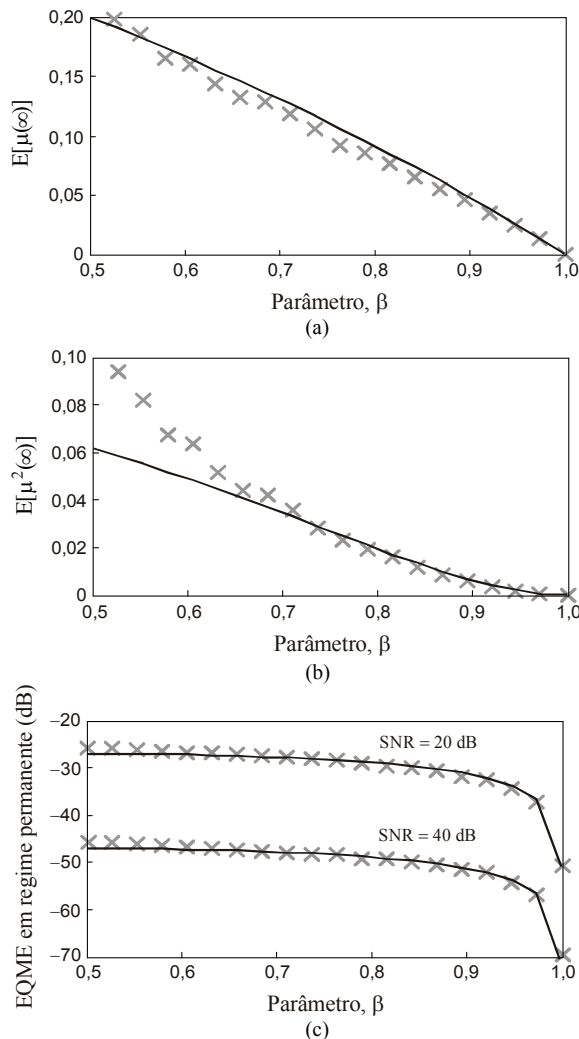


Fig. 1. Exemplo 1. Comportamento do algoritmo em regime permanente obtido por simulações de MC (marcadores cinza) e predito a partir das expressões de modelo propostas (linhas escuras). (a) Valor médio do passo de adaptação em regime permanente [dado por (24)]. (b) Valor quadrático médio do passo de adaptação em regime permanente [dado por (32)]. (c) EQME em regime permanente [dado por (14)].

B. Exemplo 2

Este exemplo visa: i) mostrar que o algoritmo VSS-NLMS de [16] exibe uma velocidade de convergência mais rápida do que a do algoritmo NLMS (padrão); e ii) verificar que ambos os algoritmos podem ser ajustados para alcançar o mesmo EQME em regime permanente através de (33). Para isso, assume-se aqui β igual a 0,85 e 0,98 para o algoritmo VSS-NLMS, implicando [a partir de (33)] que o passo de adaptação do algoritmo NLMS μ_{NLMS} deve ser feito igual a 0,1714 e 0,0291, respectivamente.

Na Fig. 2, são apresentadas as curvas de aprendizagem obtidas por simulações de MC tanto para o algoritmo VSS-NLMS considerado quanto para o algoritmo NLMS (padrão). Observe que, para o mesmo valor de EQME em regime permanente, o algoritmo VSS-NLMS supera o algoritmo NLMS em termos de velocidade de convergência, independente do valor de SNR considerado. (Tal melhoria no desempenho em relação ao algoritmo NLMS torna-se menos evidente à medida que β é decrescido.) Além disso, a Fig. 2 confirma que a expressão de modelo (33) permite ajustar adequadamente ambos os algoritmos para atingir o mesmo EQME em regime permanente, sem a necessidade de extensivas simulações.

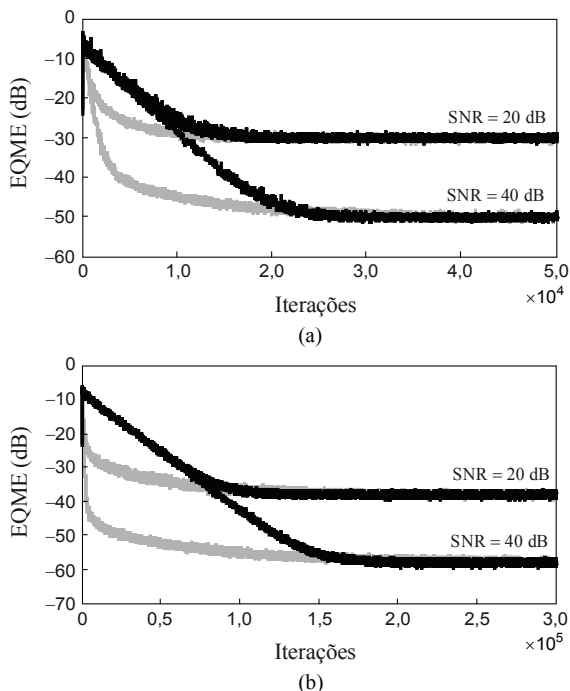


Fig. 2. Exemplo 2. Curvas de aprendizagem (EQME) obtidas por simulação de MC para o algoritmo NLMS (linhas escuras) e o algoritmo VSS-NLMS (linhas cinza), considerando o mesmo EQME em regime permanente [dado por (33)]. (a) $\beta = 0,85$ e $\mu_{NLMS} = 0,1714$. (b) $\beta = 0,98$ e $\mu_{NLMS} = 0,0291$.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, foram derivadas expressões de modelo caracterizando o comportamento em regime permanente do algoritmo VSS-NLMS introduzido em [16]. A partir dessas expressões, importantes aspectos sobre o comportamento do algoritmo foram observados, especialmente acerca do impacto do parâmetro de suavização em seu desempenho. Particularmente, foi verificado que a regra de ajuste do passo de adaptação praticamente não é afetada pelo ruído de medição, o que permite o algoritmo alcançar um EQME em regime permanente pequeno quando comparado a outros da literatura. Adicionalmente, foi observado que valores de EQME em regime permanente pequenos são alcançados fazendo o parâmetro de suavização próximo à unidade. Ainda, uma relação analítica entre o algoritmo VSS-NLMS considerado e o NLMS foi estabelecida, tornando assim possível ajustar ambos os algoritmos para atingir o mesmo EQME em regime permanente sem o uso de extensivas simulações. Resultados de simulação ratificaram as características observadas como também confirmaram a precisão muito boa obtida através das expressões de modelo propostas.

APÊNDICE

DETERMINAÇÃO DE (13)

No intuito de tornar o documento autocontido, soluções analíticas para computar o valor esperado E_1 [dado em (13)] são derivadas. Para tal, focando sobre o caso de sinal de entrada gaussiano, tem-se a partir de [19] que

$$E_1 = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^M (1 + 2\omega\lambda_k)}} d\omega \quad (36)$$

onde λ_k denota o k -ésimo autovalor de \mathbf{R} . Contudo, como não existem soluções gerais disponíveis na literatura para este tipo de integral [20], dois casos de especial interesse são discutidos a seguir:

i) Assumindo sinal de entrada não correlacionado e M par, o operador raiz quadrada no denominador de (36)

pode ser eliminado visto que $\lambda_k = \sigma_x^2$ para todo k , o que resulta em

$$E_1 = \frac{1}{(M-2)} \quad (37)$$

ii) Assumindo sinal de entrada correlacionado e M par, pares adjacentes de autovalores são substituídos por sua média geométrica com multiplicidade dois a fim de eliminar o operador raiz quadrada em (36). Então, considerando apenas autovalores distintos, realizando a expansão em frações parciais e integrando a expressão resultante [20], obtém-se

$$E_1 \cong \frac{1}{2\sqrt{\prod_{k=1}^M \lambda_k}} \sum_{l=1}^{M/2} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{M/2} \frac{\tilde{\lambda}_q}{(\tilde{\lambda}_l - \tilde{\lambda}_q)} \tilde{\lambda}_l^{(M/2)-1} \ln(\tilde{\lambda}_l) \quad (38)$$

com

$$\tilde{\lambda}_q = \sqrt{\lambda_{(2q-1)}\lambda_{(2q)}}, \quad q = 1, 2, \dots, M/2. \quad (39)$$

REFERÊNCIAS

- [1] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [2] J. Benesty, H. Rey, L. R. Vega, and S. Tressens, "A nonparametric VSS NLMS algorithm," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 13, no. 10, pp. 581-584, Oct. 2006.
- [3] H.-C. Shin, A. H. Sayed, and W.-J. Song, "Variable step-size NLMS and affine projection algorithms," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 11, no. 2, pp. 132-135, Feb. 2004.
- [4] K. Mayyas and F. Momani, "An LMS adaptive algorithm with a new step-size control equation," *J. Franklin Inst.*, vol. 348, no. 4, pp. 589-605, May 2011.
- [5] S. Ciochină, C. Paleologu, and J. Benesty, "An optimized NLMS algorithm for system identification," *Signal Process.*, vol. 118, pp. 115-121, Jan. 2016.
- [6] V. J. Mathews and Z. Xie, "A stochastic gradient adaptive filter with gradient adaptive step size," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 6, pp. 2075-2087, Jun. 1993.
- [7] W.-P. Ang and B. Farhang-Boroujeny, "A new class of gradient adaptive step-size LMS algorithms," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 4, pp. 805-810, Apr. 2001.
- [8] Y. Zhang, N. Li, J. A. Chambers, and Y. Hao, "New gradient-based variable step size LMS algorithms," *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, Article no. 529480, pp. 1-9, Feb. 2008.
- [9] T. Aboulnasr and K. Mayyas, "A robust variable step-size LMS-type algorithm: analysis and simulations," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, no. 3, pp. 631-639, Mar. 1997.
- [10] R. H. Kwong and E. W. Johnston, "A variable step size LMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, no. 7, pp. 1633-1642, Jul. 1992.
- [11] Y. Wei, S. B. Gelfand, and J. V. Krogmeier, "Noise-constrained least mean squares algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 9, pp. 1961-1970, Sep. 2001.
- [12] D. W. Kim, J. H. Choi, Y. S. Choi, C. H. Jeon, and H. Y. Ko, "A VS-LMS algorithm using normalized absolute estimation error," in *Proc. Digital Process. Appl. (TENCON)*, Perth, WA, Australia, Nov. 1996, vol. 2, pp. 692-697.
- [13] S. Gollamudi, S. Nagaraj, S. Kapoor, and Y.-F. Huang, "Set-membership filtering and a set-membership normalized LMS algorithm with an adaptive step size," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 5, no. 5, pp. 111-114, May 1998.
- [14] D. I. Pazaitis and A. G. Constantinides, "A novel kurtosis driven variable step-size adaptive algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, no. 3, pp. 864-872, Mar. 1999.
- [15] H.-C. Huang and J. Lee, "A new variable step-size NLMS algorithm and its performance analysis," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 4, pp. 2055-2060, Apr. 2012.
- [16] J. G. F. Zipf, O. J. Tobias, and R. Seara, "Non-parametric VSS-NLMS algorithm with control parameter based on the error correlation," in *Proc. IEEE Int. Telecommun. Symp. (ITS)*, Manaus, AM, Brazil, Sep. 2010, pp. 1-5.
- [17] E. V. Kuhn, J. G. F. Zipf e R. Seara, "Modelagem estocástica de um algoritmo NLMS de passo variável não paramétrico," in *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais (SBRt)*, Santarém, PA, Brasil, Set. 2016, pp. 448-452.
- [18] C. Samson and V. Reddy, "Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 31, no. 5, pp. 1177-1191, Oct. 1983.
- [19] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, "Stochastic modeling of the transform-domain ϵ LMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1840-1852, May 2008.
- [20] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 6th ed. San Diego, CA: Academic Press, 2000.