Identidades do tipo MacWilliams para métricas de Lee

Jerry Pinheiro e Marcelo Firer

***Resumo*— Identidades do tipo MacWilliams para códigos lineares sobre $\mathbb{Z}_l$ munido da métrica de Lee são identidades que relacionam as distribuições de pesos de Lee de códigos e de seus duais. Neste trabalho analisamos a menor instância: $\mathbb{Z}_5$, para o qual a existência de identidades do tipo MacWilliams é um problema em aberto. Mostramos que quando restrito a códigos unidimensionais sobre $\mathbb{Z}_5$, identidades do tipo MacWillimas podem ser obtidas. Porém, concluímos através de um exemplo de dimensão 2, que $\mathbb{Z}_5$ não admite tais identidades.**

***Palavras-Chave*— Identidades do tipo MacWilliams, Métrica de Lee.**

***Abstract*— MacWilliams-type identities for linear codes over $\mathbb{Z}_l$ endowed with the Lee metric are identities relating the Lee weight distributions of codes and its duals. In this work we analyze the smallest instance: $\mathbb{Z}_5$, for which the existence of MacWilliams-type identities is an open problem. We show that when restricted to unidimensional codes over $\mathbb{Z}_5$, MacWilliams-type identities can be obtained. However, we conclude, using a 2-dimensional example, that $\mathbb{Z}_5$ does not admit such identities.**

***Keywords*— MacWilliams-type Identities, Lee Metric.**

I. INTRODUÇÃO

Em [3], F. J. MacWilliams apresentou o que posteriormente passaram a ser chamadas de Identidades de MacWilliams. Estas identidades são, em essência, relações entre os enumeradores de pesos de Hamming de um código e de seu dual. Tais relações puderam ser obtidas devido a um simples, porém importante fato: em espaços vetoriais sobre corpos finitos munidos da métrica de Hamming, dois códigos lineares possuem a mesma distribuição de pesos se, e somente se, seus códigos duais possuem a mesma distribuição de pesos. Após o trabalho da MacWilliams, identidades do tipo MacWilliams passaram a ser exploradas em diversos cenários, incluindo em métricas de Lee, como podemos ver em [2], [1] e [6], por exemplo. A palavra “tipo” é em geral adotada para expressar que as identidades do tipo MacWilliams mesmo possuindo a mesma finalidade, elas não são as identidades clássicas obtidas por MacWilliams.

No contexto de métricas de Lee, códigos lineares de comprimento n são subgrupos aditivos de $\mathbb{Z}_l^n$. Portanto, afirmar que $\mathbb{Z}_l$ admite uma identidade do tipo MacWilliams é dizer que para todo inteiro $n \geq 1$, dois códigos lineares de comprimento n sobre $\mathbb{Z}_l$ possuem a mesma distribuição de pesos de Lee se, e somente se, seus duais possuem a mesma distribuição de pesos de Lee. Sendo assim, em [6] foram construídos exemplos assegurando que $\mathbb{Z}_8$ não admite uma identidade do tipo MacWilliams. Note que $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$ admitem trivialmente uma identidade do tipo MacWilliams, na realidade, as identidades são as originalmente apresentadas por MacWilliams pois nestes espaços, as métricas de Lee e de Hamming coincidem. Além disso, como podemos ver em [2], devido a existência do mapa de Gray, $\mathbb{Z}_4$ também admite uma identidade do tipo MacWilliams.

Em [7] foi supostamente obtida identidades de MacWilliams para todo $\mathbb{Z}_l$ com $l > 1$. Porém os exemplos de [6] asseguram que, ao menos em $\mathbb{Z}_8$, tais identidades são falsas. Pouco depois, em [8], foi provado que para todo $l \geq 5$, as identidades obtidas em [7] não são verdadeiras. No entanto, a construção feita em [6] apenas garante a não existência de um tipo particular de identidade, ou seja, não garante que $\mathbb{Z}_l$ não admite uma identidade do tipo de MacWilliams para todo $l \geq 5$.

Baseado em exemplos obtidos e no comportamento das métricas de Lee, conjecturamos que para todo $l \geq 5$, $\mathbb{Z}_l$ não admite uma identidade do tipo MacWilliams. Mostraremos, através de exemplos, que $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{Z}_7$ admitem códigos com mesma distribuição de pesos de Lee porém com distribuição distinta em seus duais, ou seja, que em tais instâncias, não é possível obter uma identidade do tipo MacWilliams. No entanto, mostraremos que, restrito a códigos unidimensionais, $\mathbb{Z}_5$ admite uma identidade do tipo MacWilliams.

Esta trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos os conceitos básicos de códigos. Na Seção 3, exibimos exemplos de espaços que não admitem uma identidade do tipo MacWilliams e apresentamos os recentes avanços obtidos. A Subseção 3-A é destinada a investigação da existência de identidade de MacWilliams restrita a códigos unidimensionais sobre $\mathbb{Z}_5$.

II. PRELIMINARES

Seja $\mathbb{Z}_l$ o anel de inteiros módulo l. O *peso de Lee* de um elemento $a \in \mathbb{Z}_l$ definido por

$$\mathrm{wt}_L(a) = \min\{a, |l - a|\}$$

induz a *métrica de Lee* em $\mathbb{Z}_l$. Dessa forma, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}_l$, a distância de de Lee sobre $\mathbb{Z}_l$ é dada por

$$d_L(a, b) = \mathrm{wt}_L(a - b),$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, o peso e a métrica de Lee podem ser estendidos aditivamente da seguinte maneira

$$\mathrm{wt}_L(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{wt}_L(x_i) \text{ e } d_L(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_L(x_i, y_i)$$

Jerry Pinheiro e Marcelo Firer¸ Instituto de Matemática, Estatísitca e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, E-mails: jerryapinheiro@gmail.com, mfirer@ime.unicamp.br. Trabalho parcialmente financiado pelos projetos Fapesp (2013/25977-7) e (2016/01551-9).

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são elementos do conjunto das n-uplas sobre $\mathbb{Z}_l$, denotado por $\mathbb{Z}_l^n$. Note que $\lfloor l/2 \rfloor = \max\{\mathrm{wt}_L(a) : a \in \{0, 1, \dots, l-1\}\}$ onde $\lfloor a \rfloor$ denota a parte inteira de a.

Um *código linear* $\mathcal{C}$ de comprimento n sobre $\mathbb{Z}_l$ é um $\mathbb{Z}_l$-submódulo de $\mathbb{Z}_l^n$, equivalentemente, $\mathcal{C}$ é um subgrupo aditivo $\mathbb{Z}_l^n$. Além disso, seu *dual* $\mathcal{C}^\perp$ é o submódulo de $\mathbb{Z}_l^n$ definido por

$$\mathcal{C}^\perp = \{v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}_l^n \ : \ z_1 c_1 + \cdots + z_n c_n = 0 \quad \forall\ c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{C}\}.$$

A distribuição dos pesos de Lee de um código é objeto de interesse em teoria de códigos pois determina invariantes clássicos, por exemplo, determina o raio de empacotamento do código, que por sua vez, estabelece a capacidade de correção de erros do código. A distribuição de pesos é comumente expressa através do polinômio enumerador de pesos.

Dado um código linear $\mathcal{C}$, o *polinômio enumerador de pesos de Lee* de $\mathcal{C}$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(x, y) &= \sum_{c \in \mathcal{C}} x^{n\lfloor l/2 \rfloor - \mathrm{wt}_L(c)} y^{\mathrm{wt}_L(c)} \\ &= \sum_{i=1}^{n\lfloor l/2 \rfloor} A_i x^{n\lfloor l/2 \rfloor - i} y^i\end{aligned}$$

onde $A_i = |\{c \in \mathcal{C} : \mathrm{wt}_L(c) = i\}|$. O vetor $(A_0, A_1, \dots, A_{n\lfloor l/2 \rfloor})$ é a *distribuição de pesos* de $\mathcal{C}$.

III. Identidades de MacWilliams

Como podemos ver em [4], para certos espaços munidos da métrica de Hamming, a distribuição de pesos de um código pode ser obtida através da distribuição de pesos do seu código dual. As Identidades de MacWilliams (relações que permitem a determinação da distribuição de pesos de um código através da distribuição de pesos de seu dual) são possíveis de serem expressas pois nestes espaços, para quaisquer dois códigos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, as distribuições de pesos de Hamming de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ coincidem se, e somente se, as distribuições de pesos de Hamming de $\mathcal{C}^\perp$ e $\mathcal{D}^\perp$ coincidem. Portanto, para as métricas de Lee, temos a seguinte definição:

Definição 1: Dizemos que $\mathbb{Z}_l$ admite uma identidade do tipo MacWilliams se para quaisquer dois códigos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ com $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(x, y) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(x, y)$, implicar que $\mathcal{L}_{\mathcal{C}^\perp}(x, y) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}^\perp}(x, y)$.

Apartir do trabalho da MacWilliams, questões de existência de identidades do tipo MacWilliams para métricas não-Hamming passaram a ser recorrentes em teoria de códigos. Em algumas métricas tais relações não são possíveis, veja [5].

Em relação as métricas de Lee, em [6], foi apresentado um exemplo de códigos sobre $\mathbb{Z}_8$ possuindo mesma distribuição de pesos cujos duais não possuem a mesma distribuição de pesos, e portanto, tal exemplo assegura que $\mathbb{Z}_8$ não admite identidades do tipo MacWilliams. Apresentaremos agora o exemplo, seus respectivos polinômios enumeradores de pesos podem ser encontrados no apêndice.

Exemplo 1: [6] Sejam $\mathcal{C}_1 = span(1, 3, 4)$ e $\mathcal{D}_1 = span(1, 1, 2)$ dois códigos lineares sobre $\mathbb{Z}_8$. Claramente temos que $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_1}(x, y) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}(x, y)$. Além disso, podemos verificar que $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_1^\perp}(x, y) \neq \mathcal{L}_{\mathcal{D}_1^\perp}(x, y)$.

Apresentaremos a seguir dois pares de códigos que asseguram a não existência de identidades do tipo MacWilliams para $\mathbb{Z}_l$ nos casos $l = 6$ e $l = 7$, seus respectivos polinômios enumeradores de pesos de Lee podem ser encontrados no apêndice.

- $\mathbb{Z}_7$:
$$\mathcal{C}_2 = span(1, 1, 1, 3, 2, 1) \text{ e } \mathcal{D}_2 = span(1, 1, 5, 6, 5, 5);$$
- $\mathbb{Z}_6$:
$$\mathcal{C}_3 = span(1, 5, 3, 3) \text{ e } \mathcal{D}_3 = span(1, 5, 5, 1).$$

Note que os quatro códigos apresentados possuem um único gerador. O principal resultado da próxima seção é mostrar que em $\mathbb{Z}_5$ exemplos unidimensionais satisfazendo as propriedades dos exemplos acima não são possíveis de serem construídos. Para o caso geral, em [8], foi mostrado que se $\mathcal{C}$ é um código de comprimento n sobre $\mathbb{Z}_l$ com $l \geq 5$, e m é uma potência de primo divisor de l, então as distribuições de pesos de $\mathcal{C}$ e de $\mathcal{C}^\perp$ não podem ser relacionadas da forma

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}^\perp}(x, y) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(x + (m-1)y, x - y).$$

Note que este resultado não implica que $\mathbb{Z}_l$ não admite a identidade de MacWilliams se $l \geq 5$. Portanto, a conjectura de que $\mathbb{Z}_l$ não admite uma identidade do tipo MacWilliams para todo $l \geq 5$ ainda permanece não resolvida. Como alternativa podemos limitar a busca por identidades em determinadas famílias de códigos, faremos isso pra códigos sobre $\mathbb{Z}_5$ na próxima seção.

A. Identidades de MacWilliams em $\mathbb{Z}_5$.

Como veremos no exemplo a seguir, $\mathbb{Z}_5$ também não admite uma identidade do tipo MacWilliams, porém, mostraremos que se restringirmos apenas a códigos unidimensionais, é possível estabelecer tais relações.

Exemplo 2: Considere os códigos

$$\mathcal{C}_4 = span\{(1, 0, 1, 3, 4, 4, 3), (0, 1, 1, 1, 2, 4, 1)\}$$

e

$$\mathcal{D}_4 = span\{(1, 0, 2, 3, 0, 4, 4), (0, 1, 2, 2, 4, 0, 3)\}.$$

Note, pelo apêndice, que ambos os códigos possuem mesma distribuição de pesos porém seus duais não possuem mesma distribuição de pesos.

A fim de obter algum tipo de identidade relacionando polinômios enumeradores de pesos de Lee, nos limitaremos a códigos com uma dimensão específica.

Definição 2: Diremos que $\mathbb{Z}_5$ admite uma identidade do tipo k-MacWilliams se para quaisquer dois códigos k-dimensionais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ com $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(x, y) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(x, y)$, implicar que $\mathcal{L}_{\mathcal{C}^\perp}(x, y) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}^\perp}(x, y)$.

Para mostrarmos que $\mathbb{Z}_5$ admite uma identidade do tipo 1-MacWilliams usaremos a relação entre códigos e duais dada pelos seus polinômios simetrizados, que são polinômios obtido através de uma "simetrização" do *polinômio completo*, veja [4]. Como podemos ver em [4], as relações obtidas pelos polinômios simetrizados são também chamadas de identidades de MacWilliams. Antes de apresentar tais identidades, necessitamos de algumas definições.

Seja $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}_5^n$, para $i \in \{0, 1, 2\}$, defina $s_i(u) = |\{j : u_j = i \text{ ou } u_j = 5 - i\}|$, ou seja, $s_i(u)$ conta a quantidade de coordenadas em u cujas entradas são i ou $5-i$. O vetor $(s_0(u), s_1(u), s_2(u))$ é chamado de *composição de Lee de* u.

Definição 3: (Polinômio Simetrizado) O polinômio simetrizado de um código linear $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{Z}_5$ é dado por

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(x, y, z) = \sum_{c \in \mathcal{C}} x^{s_0(c)} y^{s_1(c)} z^{s_2(c)}.$$

O polinômio simetrizado é mais refinado do que o polinômio enumerador de pesos no sentido que dois códigos com o mesmo polinômio enumerador de pesos não necessariamente possuem o mesmo polinômio simétrico, porém se ambos possuem o mesmo polinômio simétrico então certamente possuem o mesmo polinômio enumerador de pesos.

Exemplo 3: Considere os códigos $\mathcal{C}_4$ e $\mathcal{D}_4$ do Exemplo 2. Como podemos ver no apêndice, ambos códigos possuem mesma distribuição de pesos, porém

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}_4}(x, y, z) = x^7 + 2x^2y^4z + 4xy^5z + 2x^2y^3z^2 + 2xy^4z^2$$
$$+2y^5z^2 + 2x^2y^2z^3 + 2x^2yz^4 + 2xy^2z^4 + 4xyz^5 + 2y^2z^5$$

e

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}_4}(x, y, z) = x^7 + 2xy^6 + 2xy^5z + 4x^2y^3z^2 + 4x^2y^2z^3$$
$$+4xy^3z^3 + 2y^4z^3 + 2y^3z^4 + 2xyz^5 + 2xz^6.$$

Lema 1: Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são códigos lineares de comprimento n sobre $\mathbb{Z}_5$ tais que $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(x, y, z) = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(x, y, z)$, então $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(x, y) = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(x, y)$.

Demonstração: Basta notar que dois elementos de $\mathbb{Z}_5^n$ com mesma composição de Lee possuem mesmo peso de Lee. ■

Seja $\mathcal{C}$ um código linear sobre $\mathbb{Z}_5$ de comprimento n, sendo $\omega = e^{(2\pi i)/5}$ uma raiz da unidade, de [4] temos que a *identidade de MacWilliams para polinômios simetrizados* para códigos sobre $\mathbb{Z}_5$ é dada por

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}^\perp}(x, y, z) = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z), d(x, y, z), e(x, y, z)), \quad (1)$$

onde

- $a(x, y, z) = x + 2(y + z)$,
- $b(x, y, z) = x + (\omega + \omega^4)y + (\omega^2 + \omega^3)z$,
- $c(x, y, z) = x + (\omega^2 + \omega^3)y + (\omega^4 + \omega)z$,
- $d(x, y, z) = x + (\omega^3 + \omega^2)y + (\omega + \omega^4)z$,
- $e(x, y, z) = x + (\omega^4 + \omega)y + (\omega^3 + \omega^2)z$.

Usando a Identidade (1), mostraremos que se nos restringirmos a códigos unidimensionais sobre $\mathbb{Z}_5$, a recíproca do Lema 1 é verdadeira. Para isso, se $u \in \mathbb{Z}_5$ e k_i coordenadas de u possuem valor i onde $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, considere a seguinte notação: $u = 0^{k_0}1^{k_1}2^{k_2}3^{k_3}4^{k_4}$. Dessa forma, seja $\mathcal{C} = span(u)$ e considere o mapa linear $T : \mathbb{Z}_5^n \to \mathbb{Z}_5^n$ onde $T(v) = (T_1(v_1), \ldots, T_n(v_n))$ e $T_i(v_i) = v_i$ se $u_i \in \{0, 1, 2\}$ e $T_i(v_i) = 4v_i$ se $u_i \in \{3, 4\}$. Segue que a distribuição de pesos de $\mathcal{C}$ coincide com a distribuição de pesos de $T(\mathcal{C})$ onde $T(\mathcal{C}) = span(u')$ com $u' = 0^{k_0}1^{k_1+k_4}2^{k_2+k_3}$. Portanto, dado $\mathcal{C} = span(u)$, podemos, sem perca de generalidade, assumir que $u = 0^{k_0}1^{k_1}2^{k_2}$.

Teorema 1: $\mathbb{Z}_5$ admite uma identidade do tipo 1-MacWilliams.

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que em $\mathbb{Z}_5$ a distribuição de pesos de códigos unidimensionais determina o polinômio simétrico de tais códigos. Sejam $\mathcal{C} = span(u)$ e $\mathcal{D} = span(v)$ dois códigos unidimensionais com mesma distribuição de pesos. Como visto anteriormente, podemos assumir que $u = 0^{k_0}1^{k_1}2^{k_2}$ e $v = 0^{k_0'}1^{k_1'}2^{k_2'}$. Dessa forma, $\mathrm{wt}_L(u) = k_1 + 2k_2 = \mathrm{wt}_L(4u)$ e $\mathrm{wt}_L(v) = k_1' + 2k_2' = \mathrm{wt}_L(4v)$. Além disso, $\mathrm{wt}_L(2u) = 2k_1 + k_2 = \mathrm{wt}_L(3u)$ e $\mathrm{wt}_L(2v) = 2k_1' + k_2' = \mathrm{wt}_L(3v)$. Logo,

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = k_1' + 2k_2' \\ 2k_1 + k_2 = 2k_1' + k_2' \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} k_1 + 2k_2 = 2k_1' + k_2' \\ 2k_1 + k_2 = k_1' + 2k_2' \end{cases}.$$

Em ambos os casos concluímos que $k_1 = k_1'$ e $k_2 = k_2'$. Portanto, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ possuem mesmo polinômio simetrizado, a saber,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}}(x, y, z) = x^n + 2y^{k_1}z^{k_2} + 2y^{k_2}z^{k_1} = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(x, y, z)$$

Pela Identidade (1) temos que os polinômios simetrizados de $\mathcal{C}^\perp$ e $\mathcal{D}^\perp$ coincidem e portanto, pelo Lema 1, $\mathcal{C}^\perp$ e $\mathcal{D}^\perp$ possuem mesma distribuição de pesos de Lee. ■

Salientamos que, como visto no Exemplo 1 e nos códigos $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{D}_3$, o Teorema 1 não seria verdadeiro se considerássemos os anéis $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_7$ e $\mathbb{Z}_8$.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fapesp pelo apoio financeiro obtido através dos projetos de números 2013/25977-7 e 2016/01551-9.

REFERÊNCIAS

[1] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. Self-dual codes over the integers modulo 4. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 62(1):30–45, 1993.

[2] A. R. Hammons, P. V. Kumar, A. R. Calderbank, N. J. A. Sloane, and P. Solé. The $\mathbb{Z}_4$-linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(2):301–319, Mar 1994.

[3] F. J. MacWilliams. A theorem on the distribution of weights in a systematic code. *The Bell System Technical Journal*, 42(1):79–94, 1963.

[4] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane. *The theory of error-correcting codes*. Elsevier, 1977.

[5] J. A. Pinheiro and M. Firer. Classification of poset-block spaces admitting Macwilliams-type identity. *IEEE Transactions on Information Theory*, 58(12):7246–7252, 2012.

[6] M. Shi, K. Shiromoto, and P. Solé. A note on a basic exact sequence for the Lee and Euclidean weights of linear codes over $\mathbb{Z}_l$. *Linear Algebra and Its Applications*, 475:151–153, 2015.

[7] K. Shiromoto. A basic exact sequence for the Lee and Euclidean weights of linear codes over $\mathbb{Z}_l$. *Linear Algebra and its Applications*, 295(1):191 – 200, 1999.

[8] Y. Tang, S. Zhu, and X. Kai. Macwilliams type identities on the Lee and Euclidean weights for linear codes over $\mathbb{Z}_l$. *Linear Algebra and its Applications*, 516:82–92, 2017.

APÊNDICE

Polinômios enumeradores de pesos de Lee dos códigos apresentados no decorrer do texto:

- Códigos sobre $\mathbb{Z}_8$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_1}(x,y) = x^{12} + 2x^8y^4 + 5x^4y^8 = \mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}(x,y);$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_1^\perp}(x,y) = x^{12}+2x^{10}y^2+4x^9y^3+7x^8y^4+12x^7y^5+12x^6y^6 +12x^5y^7 + 7x^4y^8 + 4x^3y^9 + 2x^2y^{10} + y^{12};$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1^\perp}(x,y) = x^{12}+2x^{10}y^2+6x^9y^3+3x^8y^4+10x^7y^5+20x^6y^6 +10x^5y^7 + 3x^4y^8 + 6x^3y^9 + 2x^2y^{10} + y^{12}.$$

- Códigos sobre $\mathbb{Z}_7$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_2}(x,y) = x^{18} + 2x^9y^9 + 2x^6y^{12} + 2x^3y^{15} = \mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}(x,y);$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_2^\perp}(x,y) = x^{18}+12x^{16}y^2+38x^{15}y^3+128x^{14}y^4+324x^{13}y^5 +666x^{12}y^6+1158x^{11}y^7+1696x^{10}y^8+2252x^9y^9+2622x^8y^{10} +2562x^7y^{11}+2006x^6y^{12}+1660x^5y^{13}+960x^4y^{14}+454x^3y^{15} +204x^2y^{16} + 56x^1y^{17} + 8y^{18};$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}_2^\perp}(x,y) = x^{18}+12x^{16}y^2+36x^{15}y^3+120x^{14}y^4+372x^{13}y^5 +630x^{12}y^6+1074x^{11}y^7+1812x^{10}y^8+2252x^9y^9+2616x^8y^{10} +2490x^7y^{11}+2030x^6y^{12}+1698x^5y^{13}+948x^4y^{14}+452x^3y^{15} +192x^2y^{16} + 66x^1y^{17} + 6y^{18}.$$

- Códigos sobre $\mathbb{Z}_6$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_3}(x,y) = x^{12} + 2x^8y^4 + 2x^4y^8 + y^{12} = \mathcal{L}_{\mathcal{D}_3}(x,y);$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_3^\perp}(x,y) = x^{12} + 10x^{10}y^2 + 50x^8y^4 + 94x^6y^6 + 50x^4y^8 +10x^2y^{10} + y^{12};$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}_3^\perp}(x,y) = x^{12} + 12x^{10}y^2 + 42x^8y^4 + 106x^6y^6 + 42x^4y^8 +12x^2y^{10} + y^{12}.$$

- Códigos sobre $\mathbb{Z}_5$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_4}(x,y) = x^{14} + 2x^8y^6 + 6x^7y^7 + 4x^6y^8 + 4x^5y^9 + 2x^4y^{10} +4x^3y^{11} + 2x^2y^{12} = \mathcal{L}_{\mathcal{D}_4}(x,y);$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_4^\perp}(x,y) = x^{14} + 4x^{12}y^2 + 12x^{11}y^3 + 56x^{10}y^4 + 174x^9y^5 +292x^8y^6 + 458x^7y^7 + 586x^6y^8 + 610x^5y^9 + 490x^4y^{10} +278x^3y^{11} + 118x^2y^{12} + 42x^1y^{13} + 4y^{14};$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}_4^\perp}(x,y) = x^{14} + 4x^{12}y^2 + 12x^{11}y^3 + 60x^{10}y^4 + 152x^9y^5 +332x^8y^6 + 436x^7y^7 + 578x^6y^8 + 614x^5y^9 + 492x^4y^{10} +288x^3y^{11} + 110x^2y^{12} + 40x^1y^{13} + 6y^{14}.$$