

# Deslocamento Fracionário de Sinais sobre Grafos

Guilherme B. Ribeiro e Juliano B. Lima

**Resumo**—A teoria de processamento de sinais sobre grafos surgiu nos últimos anos com a proposta de generalizar o processamento clássico de sinais de tempo discreto para os casos em que seu domínio é irregular, definido como um grafo arbitrário. Nesse contexto, este artigo investiga a noção de deslocamento fracionário de sinais sobre grafos e, para o caso de grafos em anel, compara a abordagem proposta com aquela da teoria clássica, confirmando a consistência entre ambas. Por fim, calcula-se a forma polinomial do respectivo filtro de deslocamento fracionário.

**Palavras-Chave**—Processamento de sinais sobre grafos, filtro de deslocamento fracionário, interpolação.

**Abstract**—The theory of graph signal processing has been established over the last decade, with the purpose of generalizing tools from classical digital signal processing to the cases where the signal domain is an irregular network, modelled by an arbitrary graph. In this paper, we investigate the fractional shift of graph signals and, when dealing with ring graphs, compare the proposed methodology to the classical one; the consistency between the referred two approaches is verified and the polynomial representation of the fractional delay filter is computed.

**Keywords**—Graph signal processing, fractional delay filter, interpolation.

## I. INTRODUÇÃO

Dados de variáveis multidimensionais definidos sobre estruturas de rede são a todo instante gerados, armazenados e processados em sistemas relacionados às diversas áreas da engenharia e da tecnologia. Medições em um conjunto de sensores e dispositivos de Internet das Coisas [1], [7], [8], [9], [22], número de citações em uma rede de colaboração científica ou relações em mídias sociais (*collaboration graph*, ou *social graph*) [3], interações entre indivíduos em um ecossistema (*ecological networks*) [5], e uso de *graphical models* para modelagem de processos [4], [13], [21] são exemplos de sistemas cuja estrutura pode ser modelada por um grafo [10], a cujos vértices estejam associadas variáveis de interesse.

O processamento de sinais sobre grafos é um ferramental teórico criado na última década para estender os métodos clássicos de processamento de sinais para os casos em que o domínio é irregular, representado por um grafo arbitrário. Duas abordagens distintas ganharam corpo ao longo dos anos. A primeira baseia-se na teoria espectral de grafos e analisa sinais definidos sobre grafos não-direcionais com pesos reais não-negativos, utilizando a matriz Laplaciana do grafo para construir uma base para o espaço de sinais [19]; a segunda emprega processamento algébrico de sinais, utilizando a matriz de

adjacência ponderada como bloco elementar. Esta abordagem, referida como  $DSP_G$  (processamento digital de sinais sobre grafos) e adotada no presente artigo, permite lidar com sinais definidos tanto em grafos direcionais como não-direcionais, e com pesos de valores reais ou complexos [17].

Atualmente, as investigações sobre processamento de sinais sobre grafos têm-se voltado, principalmente, para ferramentas aplicáveis a sinais estáticos. Entretanto, problemas envolvendo sinais variantes no tempo e propagação de distúrbios em sinais sobre grafos ainda apresentam várias questões em aberto [6]. Com esta motivação, o presente artigo introduz a noção de deslocamento fracionário de sinais sobre grafos. Considerando a teoria de  $DSP_G$ , verifica-se a consistência da metodologia proposta com a abordagem clássica para este problema. O deslocamento não-inteiro pode apresentar-se como uma ferramenta útil para estimação de sinais variantes no tempo em posições onde não exista um vértice do grafo.

## II. FUNDAMENTOS DO PROCESSAMENTO DE SINAIS SOBRE GRAFOS

Enquanto em DSP clássico os sinais são definidos sobre domínios regulares (i. e. *grids* de pontos equiespaçados de uma ou mais dimensões), em  $DSP_G$ , esta noção é generalizada para domínios irregulares, no sentido de que a posição e a *conexão* dos pontos no *grid* é diversa, formando um grafo arbitrário. A seguir, são apresentadas de forma sucinta algumas das principais definições de  $DSP_G$ . O leitor pode se aprofundar em tais conceitos consultando os trabalhos de Sandryhaila, Moura *et al.* [2], [14], [15], [16], [17], [18].

### A. Sinais e filtros sobre grafos

Seja  $\mathcal{G} = \{\mathbf{A}, \mathcal{V}\}$  um grafo definido como um conjunto de vértices  $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$  conectados ou não por arestas ponderadas. A matriz de adjacência  $\mathbf{A}$  contém em sua entrada  $A_{ij}$  o peso da aresta que vai do vértice  $v_j$  para o  $v_i$ , com  $A_{ij} = 0$  se e somente se não há aresta de  $v_j$  para  $v_i$ .

Um sinal  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$  sobre o grafo  $\mathcal{G}$  é definido como

$$\mathbf{s} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}^N, \\ v_n \rightarrow \mathbf{s}(v_n) = s_n, \quad (1)$$

em que  $\mathcal{S}$  é o espaço de todos os sinais sobre  $\mathcal{G}$ , isto é, o espaço das funções discretas que mapeiam o conjunto dos  $N$  vértices de  $\mathcal{G}$  em uma  $N$ -upla de valores complexos (ou reais). Uma vez que, dada a rotulação adequada dos vértices de um grafo, um sinal  $\mathbf{s}$  é bem representado pela sequência ordenada de seus valores  $s_n$ , os sinais sobre grafos são escritos como  $N$ -uplas ordenadas em  $\mathbb{C}^N$  ou  $\mathbb{R}^N$ .

Os grafos podem ser *direcionados* ou *não-direcionados*, a depender se as arestas têm ou não orientação preferencial. Por

Guilherme B. Ribeiro e Juliano B. Lima. Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil, E-mails: guilherme.boaviagem@gmail.com, juliano.bandeira@ieee.org. Os autores agradecem ao CNPq por ter financiado este trabalho (132103/2016-8, 56744/2014-2, 307686/2014-0) e ao apoio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE / UFPE).

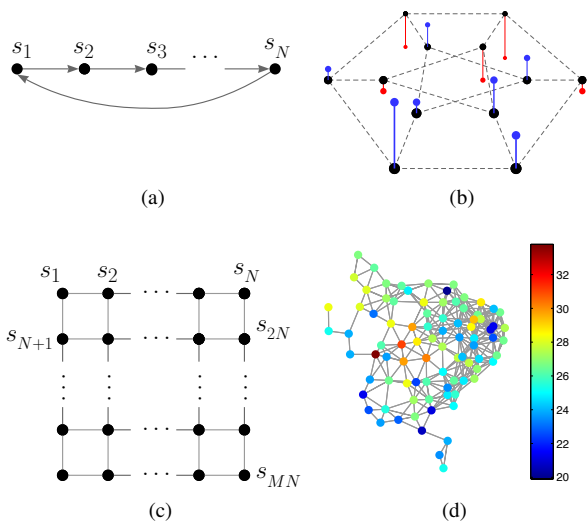


Fig. 1: Exemplos de representações de sinais sobre (a) um grafo em anel direcionado, (b) um grafo de Dürer não-direcionado, (c) um grafo não-direcionado em forma de rede retangular uniforme e (d) um grafo formado por cidades do Nordeste brasileiro.

força da sua definição, a matriz de adjacência é simétrica se e somente se seu grafo for não-direcionado.

A Fig. 1 traz exemplos de sinais sobre grafos. Imagens digitais podem ser representadas sobre grafos em uma rede retangular, como na Fig. 1(c); sinais de tempo discreto com duração finita são representados sobre grafos direcionados em anel com pesos unitários, como na Fig. 1(a). Estes grafos têm como matriz de adjacência a matriz circulante

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad (2)$$

a qual desempenha um papel fundamental em DSP<sub>G</sub>: se um sinal  $\mathbf{s} = (s_1 \ s_2 \ \dots \ s_N)^T$  definido em um grafo em anel é multiplicado à esquerda por sua matriz de adjacência, tem-se  $\tilde{\mathbf{s}} = (s_N \ s_1 \ \dots \ s_{N-1})^T$ ; ou seja,

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{C}\mathbf{s} \quad (3)$$

é o resultado de um deslocamento circular à direita do sinal  $\mathbf{s}$ . Esta propriedade sugere generalizar o deslocamento unitário de um sinal  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  sobre um grafo *qualquer* como sendo o produto à esquerda por sua matriz de adjacência,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4)$$

de forma que  $\mathbf{A}$  pode ser interpretado como o operador de deslocamento do grafo. De fato, este operador é um *filtro* de atraso de um sinal sobre o grafo.

Pode-se definir um filtro sobre sinais em um grafo com  $|\mathcal{V}| = N$  vértices como sendo qualquer matriz  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  [14]. Assim, todo filtro em grafos é linear. Por outro lado,

$$\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathbf{H}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{H}, \quad (5)$$

isto é,  $\mathbf{H}$  é um filtro linear e invariante ao deslocamento (LSI, do inglês *linear and shift-invariant*) se e somente se comuta com a matriz de adjacência  $\mathbf{A}$ . O Teorema 1 a seguir estabelece uma propriedade importante para todo filtro LSI [14].

*Teorema 1:* Seja  $\mathbf{A}$  a matriz de adjacência de um grafo, e sejam seus polinômios característico e mínimo iguais,  $p_{\mathbf{A}}(x) = m_{\mathbf{A}}(x)$ . Então,  $\mathbf{H}$  é um filtro LSI se e somente se  $\mathbf{H}$  é um polinômio em  $\mathbf{A}$ , i. e.

$$\mathbf{H} = h(\mathbf{A}) = \sum_{\ell=0}^L h_{\ell} \mathbf{A}^{\ell}, \quad (6)$$

com  $\mathbf{A}^0$  sendo a matriz identidade e  $L < \deg(m_{\mathbf{A}})$ .

O último teorema guarda uma conveniente analogia com DSP clássico, uma vez que todo filtro para sinais de tempo discreto pode ser representado como polinômios avaliados em  $z^{-1}$ , o atraso unitário, via transformada  $Z$  de sua resposta ao impulso. Nem toda matriz  $\mathbf{A}$  satisfaz a condição  $p_{\mathbf{A}} = m_{\mathbf{A}}$ ; essa possibilidade é contornada empregando o conceito de *filtros equivalentes*, a partir do qual se demonstra que todos os filtros LSI têm representação polinomial em  $\mathbf{A}$ . Detalhes a respeito de tal conceito podem ser verificados em [15].

## B. A transformada de Fourier sobre grafos

A transformada de Fourier de um sinal é a sua projeção em uma base de funções invariantes à filtragem linear e invariante no tempo (LTI, do inglês *linear and time-invariant*) [12]. Analogamente, a transformada de Fourier sobre grafos (GFT, do inglês *graph Fourier transform*) pode ser definida como a decomposição de um sinal em termos de uma base de autovetores da filtragem LSI [16].

Seja  $\mathbf{A}$  a matriz de adjacência de um grafo de  $N$  vértices. Se  $\mathbf{A}$  for diagonalizável, tem-se<sup>1</sup>

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}, \quad (7)$$

em que  $\mathbf{V}$  contém os  $N$  autovetores de  $\mathbf{A}$  em suas colunas, isto é,

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_0 \ \mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_{N-1}). \quad (8)$$

Uma vez que filtros LSI são polinômios na matriz  $\mathbf{A}$  (Teorema 1), e sabendo que uma matriz e suas potências inteiras compartilham os mesmos autovetores, as colunas de  $\mathbf{V}$  formam uma base de vetores invariantes à filtragem LSI. Somando a isto o fato de que os subespaços gerados pelos autovetores de um mesmo autovalor de  $\mathbf{A}$  são irredutíveis, têm interseção nula e suas dimensões somam  $N$  [16],  $\mathbf{V}$  fornece uma base invariante à filtragem LSI para o espaço de sinais  $\mathcal{S}$  sobre o grafo que tem  $\mathbf{A}$  por matriz de adjacência.

Desta forma, um sinal  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  pode ser decomposto em suas componentes na base  $\mathbf{V}$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \hat{x}_0 \mathbf{v}_0 + \dots + \hat{x}_{N-1} \mathbf{v}_{N-1} \\ &= \mathbf{V}(\hat{x}_0 \ \hat{x}_1 \ \dots \ \hat{x}_{N-1})^T \\ &= \mathbf{V}\hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>1</sup>Se  $\mathbf{A}$  não for diagonalizável, o raciocínio pode ser repetido utilizando-se a forma normal de Jordan.

e esta é definida como a equação de síntese da transformada de Fourier sobre grafos. A equação de análise da GFT é, portanto,

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}. \quad (10)$$

Para o caso de sinais de tempo discreto, foi assinalado que seu domínio é modelado como um grafo direcionado em anel com pesos unitários, com matriz de adjacência  $\mathbf{C}$  dada por (2). Uma vez que  $\mathbf{C}$  é circulante, ela é diagonalizada pela matriz  $\mathbf{F}$  da transformada discreta de Fourier (DFT). Assim,

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Lambda}_C\mathbf{F}, \quad (11)$$

em que  $\mathbf{\Lambda}_C = \text{diag}\left(1 e^{-j\frac{2\pi}{N}} e^{-j\frac{4\pi}{N}} e^{-j\frac{6\pi}{N}} \dots e^{-j\frac{2\pi(N-1)}{N}}\right)$ . Vale ressaltar que, neste caso, a matriz da GFT torna-se  $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{F}$ , mostrando a desejável propriedade de que a GFT de sinais de tempo discreto coincide com a DFT.

1) *A resposta em frequência de filtros para sinais sobre grafos:* A definição dada para filtros em grafos considera a ação de uma matriz sobre um sinal  $\mathbf{x}$  no domínio dos vértices de um grafo  $\mathcal{G} = \{\mathbf{A}, \mathcal{V}\}$ . Para entender como o filtro age no domínio da GFT, identificado como domínio da frequência, utiliza-se (7) e o Teorema 1. A resposta do filtro  $\mathbf{H} = \sum_{\ell=0}^L h_\ell \mathbf{A}^\ell$  ao sinal  $\mathbf{x}$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{x} &= \sum_{\ell=0}^L h_\ell \mathbf{A}^\ell \mathbf{x} = \sum_{\ell=0}^L h_\ell (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})^\ell \mathbf{x} \\ &= \mathbf{V} \left( \sum_{\ell=0}^L h_\ell \mathbf{\Lambda}^\ell \right) \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Tomando a GFT em ambos os lados da última equação, tem-se

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x} = h(\mathbf{\Lambda})\hat{\mathbf{x}}, \quad (13)$$

de forma que a ação no domínio da frequência a que corresponde a filtragem por  $\mathbf{H}$  é a multiplicação pela matriz  $h(\mathbf{\Lambda})$ , a qual representa a resposta em frequência do filtro  $\mathbf{H}$ .

### III. DESLOCAMENTO FRACIONÁRIO

Uma vez que o deslocamento unitário de um sinal pode ser entendido como o produto pela matriz de adjacência do grafo no qual ele é definido, propõe-se, neste trabalho, definir um deslocamento fracionário como o produto por uma potência não-inteira de  $\mathbf{A}$ . Precisamente, a versão do sinal  $\mathbf{x}$ , definido sobre o grafo  $\mathcal{G} = \{\mathbf{A}, \mathcal{V}\}$ , deslocado de  $a \in [0, 1]$ , é dada por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^a \mathbf{x}. \quad (14)$$

Para elucidar o significado de (14), partindo da decomposição espectral (7), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^a \mathbf{x} &= \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^a \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \lambda_1^a & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N^a \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{V}(\hat{\mathbf{h}}_a \odot \hat{\mathbf{x}}) = \text{GFT}^{-1}\{\hat{\mathbf{h}}_a \odot \hat{\mathbf{x}}\}, \end{aligned} \quad (15)$$

em que  $\hat{\mathbf{h}}_a \triangleq (\lambda_1^a \dots \lambda_N^a)$  e  $\odot$  representa o produto ponto-a-ponto entre vetores.

A Equação (15) mostra que  $\mathbf{A}^a$  é um filtro de grafo com resposta em frequência  $\text{diag}(\hat{\mathbf{h}}_a)$ , e que, se  $\mathbf{x}$  é um sinal de

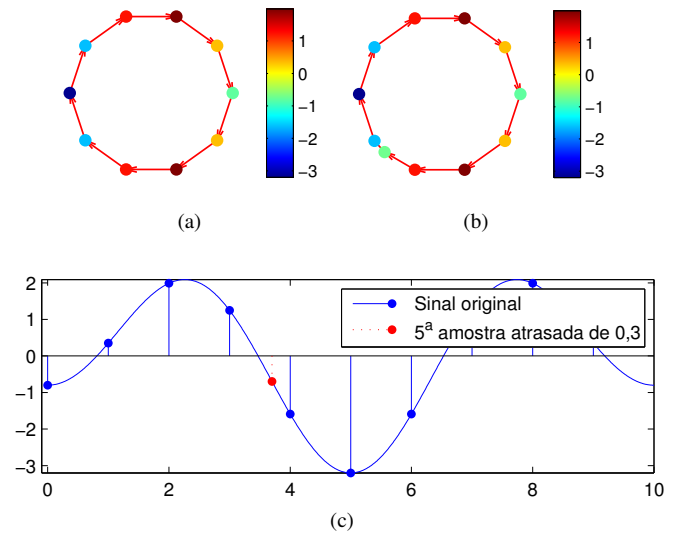


Fig. 2: Deslocamento fracionário por  $a = 0,3$  de uma amostra em um sinal definido sobre um grafo direcionado em anel com pesos unitários. (a) Sinal original sobre o grafo em anel direcionado (as arestas apontam em sentido anti-horário). (b) Grafo em que a 5ª amostra atrasada de  $a = 0,3$  aparece como uma amostra interpolada entre a 4ª e a 5ª amostras do sinal original. (c) Sinal discreto original e a amostra atrasada.

tempo discreto de  $N$  pontos (caso em que a GFT coincide com a DFT), observa-se que o filtro no domínio da DFT é o próprio vetor  $\hat{\mathbf{h}}_a$ . Neste caso, foi discutido que a matriz de adjacência do respectivo grafo é diagonalizada segundo (11), em que  $\mathbf{\Lambda}_C$  tem como entradas as  $N$  raízes da unidade. O fato da matriz de autovetores de  $\mathbf{C}$  ser a matriz de Fourier impõe uma ordem específica aos autovalores em  $\mathbf{\Lambda}_C$ , de forma que o vetor  $\hat{\mathbf{h}}_a$  é

$$\hat{\mathbf{h}}_a = (1 W_N^a W_N^{2a} \dots W_N^{aR} W_N^{-aR'} W_N^{a(-R'+1)} \dots W_N^{-a}),$$

em que  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  e

$$\begin{cases} R = \frac{N-1}{2} \text{ e } R' = R, & \text{se } N \text{ for ímpar,} \\ R = \frac{N}{2} - 1 \text{ e } R' = R + 1, & \text{se } N \text{ for par,} \end{cases} \quad (16)$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$ . Mostra-se que a DFT inversa de  $\hat{\mathbf{h}}_a$  tem componentes

$$h_a[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\sin\pi(n-a)}{\sin\frac{\pi}{N}(n-a)}, & \text{se } N \text{ for ímpar,} \\ \frac{1}{N} \cotan\frac{\pi}{N}(n-a) \sin\pi(n-a) \\ \quad + \frac{j}{N} (-1)^n \sin\pi a, & \text{se } N \text{ for par.} \end{cases} \quad (17)$$

O produto por uma potência fracionária da matriz de adjacência produz o efeito ilustrado nas Figs. 2 e 3, para um grafo em anel direcionado e um grafo não-direcionado, respectivamente. Observe, por exemplo, na Fig. 2, como a 5ª amostra do sinal deslocado de  $a = 0,3$  coincide com o valor do sinal contínuo nessa posição.

O sinal a ser deslocado precisa ter banda limitada em frequência, como ilustrado na Fig. 4; as descontinuidades presentes no sinal original provocam um efeito, no sinal deslocado, semelhante ao fenômeno de Gibbs.

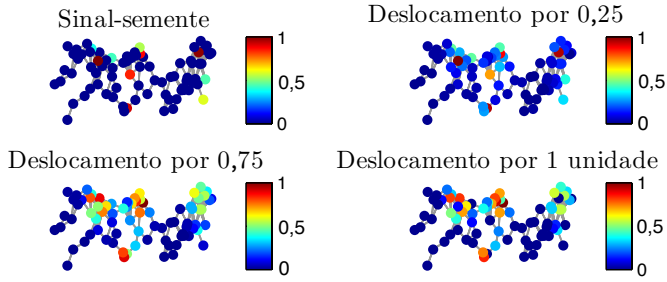


Fig. 3: Deslocamento fracionário de um sinal com 10 amostras não-nulas, definido sobre um grafo formado por 80 cidades do estado de Pernambuco, Brasil. Observa-se como o sinal deslocado assemelha-se ao original para  $a$  próximo de 0, e ao sinal deslocado de uma unidade para  $a$  próximo de 1.

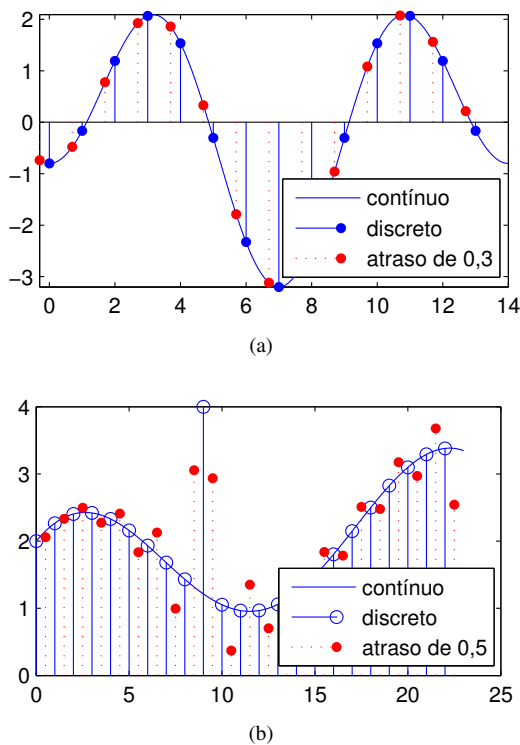


Fig. 4: Deslocamento fracionário em sinal (a) com e (b) sem descontinuidades.

#### A. Consistência com abordagens clássicas: o filtro ideal de atraso fracionário

Na abordagem clássica do problema de deslocamento fracionário de um sinal de tempo discreto, o que se pode fazer é reconstruir a versão contínua do sinal, deslocá-la e reamostrá-la com o mesmo período de amostragem [11], [20]. Este procedimento carrega, por necessidade do Teorema de Nyquist-Shannon, a restrição do sinal ter banda limitada.

Mostra-se que, se um sinal de tempo discreto  $x$  tem banda limitada, sua versão deslocada por  $a \in [0, 1]$  é  $x[n - a] = \sum_k x[k] \text{sinc}(n - k - a)$ , de modo que o filtro (passa-baixa ideal) utilizado para o deslocamento é

$$h_{LPF}[n] = \text{sinc}(n - a). \quad (18)$$

O filtro  $h_{LPF}$  é não-causal e instável (não é do tipo BIBO –

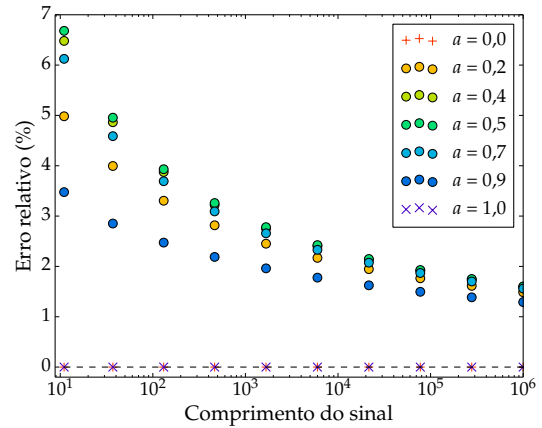


Fig. 5: Erro percentual (normalizado pela energia de  $h_{LPF}$ ) de  $h_a$  com relação a  $h_{LPF}$ , para diferentes valores de  $N$  (ímpares) e do parâmetro de deslocamento fracionário  $a$ .

*bounded input, bounded output*, pois sua resposta ao impulso tem energia infinita), e, portanto, não é fisicamente realizável. Implementações de filtros de atraso fracionário devem, assim, apenas *aproximar*  $h_{LPF}$  tanto quanto possível.

Para analisar o quão próximo de  $h_{LPF}[n] = \text{sinc}(n - a)$ ,  $0 \leq a \leq 1$ , está  $h_a[n]$ , para  $N$  ímpar (vide primeira linha de (17)), foi computada a diferença ponto-a-ponto entre estes sinais para diferentes valores de  $N \in [10^1, 10^6]$ . A Fig. 5 traz o erro relativo (razão entre a energia do erro ( $h_a - h_{LPF}$ ) e a energia de  $h_{LPF}$ ), em função de  $N$  e  $a$ .

O resultado sugere que, de fato,  $h_a$  converge na média em  $\ell^2$  para  $h_{LPF}$  à medida que  $N$  cresce, apresentando erro relativo abaixo de 5% já para  $N \approx 30$ . Além disso, o erro é maior quando  $a$  é próximo de 0,5, sendo desprezível ou nulo quando  $a$  é inteiro. De fato, o erro é exatamente zero para  $a = 0$  (ou  $a = 1$ ) e  $n = a$ , uma vez que se pode mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow a} h_a[n] = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow a} (h_a[n] - \text{sinc}(n - a)) = 0. \quad (19)$$

O mesmo resultado é obtido para  $N$  par, partindo-se da segunda linha de (17). Quando  $a$  é não-inteiro,  $h_a[n]$  é complexo, com parte imaginária de módulo constante para  $a$  fixo. Considerando somente a parte real, o erro cometido foi menor que aquele considerando também a contribuição da parte imaginária. As Figs. 6 e 7 mostram que os erros com e sem a parte imaginária igualmente decaem à medida que  $N$  cresce, mas, ao usar somente a parte real, os resultados são significativamente melhores.

#### B. Representação polinomial para o caso de grafos em anel

A matriz de deslocamento fracionário  $\mathbf{A}^a$  necessariamente comuta com  $\mathbf{A}$ , pois  $\mathbf{A}^a \mathbf{A} = \mathbf{A}^{1+a} = \mathbf{A} \mathbf{A}^a$ , de forma que  $\mathbf{A}^a$  é um filtro LSI para os sinais sobre grafos que têm  $\mathbf{A}$  por matriz de adjacência (vide (5)). A representação polinomial de  $\mathbf{A}^a$  segundo o Teorema 1, no entanto, exige que  $p_{\mathbf{A}} = m_{\mathbf{A}}$ , ou ao menos que se encontre um filtro equivalente a  $\mathbf{A}^a$  para o qual essa condição seja satisfeita. Uma vez que, para o caso do grafo direcionado em anel com pesos unitários, a matriz de adjacência  $\mathbf{C}$  em (2) satisfaz  $p_{\mathbf{C}} = m_{\mathbf{C}}$  (pelo fato de todos os

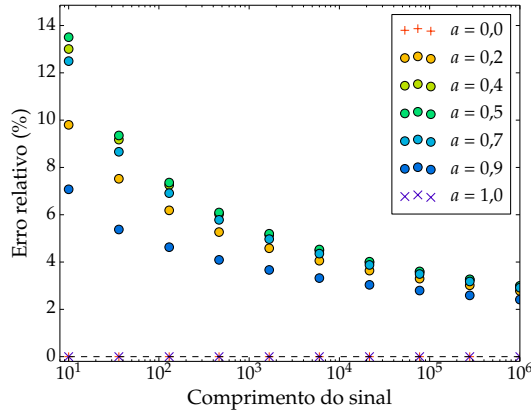


Fig. 6: Erro relativo médio entre  $\mathcal{R}e\{\mathbf{h}_a\}$  e  $\mathbf{h}_{LPF}$  para  $N$  par, em função do parâmetro de deslocamento fracionário  $a$ .

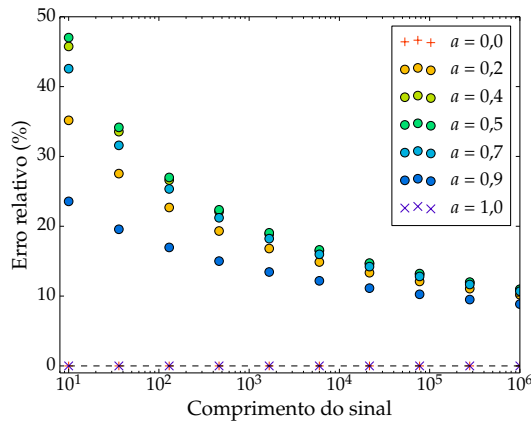


Fig. 7: Módulo do erro relativo médio entre  $\mathbf{h}_a$  e  $\mathbf{h}_{LPF}$  para  $N$  par, em função do parâmetro de deslocamento  $a$ .

autovalores de  $\mathbf{C}$  serem distintos), tem-se que  $\mathbf{H} = \mathbf{C}^a$  pode ser expresso como um polinômio de grau até  $(N - 1)$  em  $\mathbf{C}$ .

A partir de (11), sabendo que  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H$ , com  $H$  indicando o conjugado transposto, pode-se mostrar que  $\mathbf{C}^a = \mathbf{F}^H \mathbf{\Lambda}_C^a \mathbf{F}$  é uma matriz circulante com a primeira coluna dada por  $\mathbf{h}_a$  em (17). Além disso, uma vez que o produto de uma matriz à esquerda por  $\mathbf{C}$  causa um deslocamento circular para baixo em cada coluna da matriz, as  $N$  potências de  $\mathbf{C}$  formam uma base para o espaço de matrizes circulantes  $N \times N$  (observe que  $\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^0$  é a matriz identidade). Do exposto, conclui-se que os coeficientes da representação polinomial de  $\mathbf{C}^a$  são as entradas de  $\mathbf{h}_a$ , i. e.

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}^a = \sum_{\ell=0}^{N-1} h_a[\ell] \mathbf{C}^\ell. \quad (20)$$

#### IV. CONCLUSÕES

No presente artigo, investigou-se o deslocamento fracionário de sinais sobre grafos, empregando conceitos basilares da teoria de DSP<sub>G</sub>, a qual define o deslocamento unitário a partir da matriz de adjacência de um grafo. Interpretando o deslocamento fracionário como uma filtragem, mostrou-se que, para grafos em anel, sua aplicação produz os efeitos esperados, aproximando o filtro de interpolação ideal clássico e

exibindo resultados satisfatórios para sinais de banda limitada. Como trabalhos futuros, destacamos que resta investigar o significado físico para o deslocamento fracionário em grafos não-direcionados com topologia arbitrária. Além disso, estudos adicionais são necessários para exprimir matematicamente a qualidade do deslocamento fracionário em termos da banda do sinal a ser deslocado.

#### REFERÊNCIAS

- [1] K. M. Alam, M. Saini, e A. El Saddik. Toward social internet of vehicles: Concept, architecture, and applications. *IEEE Access*, 3:343–357, 2015.
- [2] S. Chen, R. Varma, A. Sandryhaila, e J. Kovačević. Discrete signal processing on graphs: Sampling theory. *IEEE Trans. Signal Process.*, 63(24):6510–6523, dec 2015.
- [3] F. Chung. Graph theory in the information age. *Notices of the AMS*, 57(6):726–732, 2010.
- [4] P. J. Gawthrop e E. J. Crampin. Modular bond-graph modelling and analysis of biomolecular systems. *IET Systems Biology*, 10(5):187–201, 2016.
- [5] A. J. Golubski, E. E. Westlund, J. Vandermeer, e M. Pascual. Ecological networks over the edge: Hypergraph trait-mediated indirect interaction (TMII) structure. *Trends in Ecology & Evolution*, 31(5):344–354, may 2016.
- [6] F. Grassi, N. Perraudin, e B. Ricaud. Tracking time-vertex propagation using dynamic graph wavelets. *arXiv preprint arXiv:1606.06653*, 2016.
- [7] L. Guo, Z. Ning, Q. Song, L. Zhang, e A. Jamalipour. A QoS-oriented high-efficiency resource allocation scheme in wireless multimedia sensor networks. *IEEE Sensors J.*, 2016.
- [8] R. K. Jain, J. M. F. Moura, e C. E. Kontokosta. Big data+ big cities: Graph signals of urban air pollution [exploratory sp]. *IEEE Signal Process. Mag.*, 31(5):130–136, 2014.
- [9] F. Ma, B. Yao, e M. Yao. Non-planar unclustered peterson graphs as scale-free models of the internet of things. In *Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference, IEEE*, pages 1040–1043. IEEE, 2016.
- [10] J. Mei e J. M. F. Moura. Signal processing on graphs: Causal modeling of unstructured data. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2016.
- [11] A. V. Oppenheim e R. W. Schaffer. *Discrete-time Signal Processing*. Pearson, 2013.
- [12] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, e S. H. Nawab. *Signals and Systems*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall, 1997.
- [13] L. Peng, Y. Li, e B. Francois. Modeling and control of doubly fed induction generator wind turbines by using causal ordering graph during voltage dips. In *Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008. International Conference on*, pages 2412–2417. IEEE, 2008.
- [14] A. Sandryhaila e J. M. F. Moura. Discrete signal processing on graphs. *IEEE Trans. Signal Process.*, 61(7):1644–1656, 2013.
- [15] A. Sandryhaila e J. M. F. Moura. Discrete signal processing on graphs: Graph filters. In *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), may 2013.
- [16] A. Sandryhaila e J. M. F. Moura. Discrete signal processing on graphs: Graph fourier transform. In *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), may 2013.
- [17] A. Sandryhaila e J. M. F. Moura. Big data analysis with signal processing on graphs: Representation and processing of massive data sets with irregular structure. *IEEE Signal Process. Mag.*, 31(5):80–90, 2014.
- [18] A. Sandryhaila e J. M. F. Moura. Discrete signal processing on graphs: Frequency analysis. *IEEE Trans. Signal Process.*, 62(12):3042–3054, jun 2014.
- [19] D. I. Shuman, S. K. Narang, P. Frossard, A. Ortega, e P. Vandergheynst. The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains. *IEEE Signal Process. Mag.*, 30(3):83–98, 2013.
- [20] V. Välimäki. *Discrete-time modeling of acoustic tubes using fractional delay filters*. Helsinki University of Technology, 1995.
- [21] M. Veerachary. Signal flow graph modelling of multi-state boost DC–DC converters. *IEE Proceedings-Electric Power Applications*, 151(5):583–589, 2004.
- [22] L. Yu, L. Feng, C. Chen, T. Qiu, L. Li, e J. Wu. A novel multi-feature representation of images for heterogeneous IoTs. *IEEE Access*, 4:6204–6215, 2016.