

# Identificação dos Parâmetros da Integral de Choquet via uma Abordagem baseada em Processamento de Sinais Esparsos

Henrique E. Oliveira, João M. T. Romano, Leonardo T. Duarte

**Resumo**—A integral de Choquet vem sendo utilizada como um operador de agregação não-linear no âmbito das chamadas técnicas de apoio à decisão multicritério. Um dos problemas nesse contexto diz respeito à identificação dos parâmetros dessa integral, que, geralmente, são representados por uma medida *fuzzy*. Dado que esse problema é mal-posto, o presente trabalho propõe uma etapa de identificação na qual se explora a esparsidade dos parâmetros desconhecidos. Diferentemente de trabalhos anteriores, que exploram a esparsidade na medida *fuzzy*, a presente proposta explora a esparsidade num domínio transformado conhecido como *representação de interação*. Experimentos numéricos indicam que a operação em tal domínio leva a resultados melhores, pois a esparsidade nesse domínio faz mais sentido do que no domínio das medidas *fuzzy*.

**Palavras-Chave**—Integral de Choquet; Sinais esparsos; Identificação de Parâmetros.

**Abstract**—The Choquet integral has been used as a nonlinear aggregation operator in the field of the multiple criteria decision aiding. One of the problems in this context is the identification of this integral parameters, that, generally, are represented by a *fuzzy* measure. This problem is ill-conditioned and, motivated by this issue, we propose an estimation procedure in which the sparsity of the parameters is used as a regularization term. Differently from previous works, which explore the sparsity on the *fuzzy* measure, the present proposal exploits sparsity in a transformed domain known as *interaction representation*. Numerical experiments attest the interest behind our proposal.

**Keywords**—Choquet Integral; Sparse Signals; Parameters Identification.

## I. INTRODUÇÃO

Uma das problemáticas no apoio à tomada de decisão é estabelecer, a partir de um conjunto de informações, uma ordem entre um conjunto de alternativas. Quando esse ordenamento deve ser feito levando em conta diferentes critérios, o problema resultante pode ser tratado por métodos de apoio à decisão multicritério (MCDA, do inglês *multiple criteria decision aiding*) [1], [2]; tal abordagem vem sendo intensamente estudada na área de pesquisa operacional.

Uma das maneiras de se abordar o problema de ordenamento em MCDA é através da definição de um operador de agregação, que visa justamente combinar os valores provenientes dos diferentes critérios considerados em um único

valor global para cada uma das alternativas. Tal abordagem é a base da teoria do valor multi-atributo (MAVT, do inglês *multi-attribute value theory*). Os exemplos mais fundamentais de operadores de agregação são de natureza linear (média ponderada).

Embora sejam simples em termos de utilização, os operadores de agregação linear operam sob a hipótese de que não há qualquer tipo de relação entre os diferentes critérios escolhidos. De fato, quando tais relações existem, a descrição correta de comportamentos racionais de decisão pode requerer a presença de elementos não-lineares no modelo considerado. Diante disso, um tema fundamental na abordagem MAVT diz respeito à utilização de operadores de agregação alternativos à média ponderada.

Um dos operadores não-lineares de agregação que vem sendo intensamente utilizado em MCDA é a integral (discreta) de Choquet [3]. Esse operador é capaz de representar diferentes tipos de interações entre critérios, tais como sinergia e redundância. Além disso, a integral de Choquet pode ser parametrizada por variáveis que admitem interpretação, e, logo, podem ser úteis no processo de apoio à decisão.

Uma das possíveis parametrizações da integral de Choquet se baseia nas chamadas capacidades de Choquet, que são, essencialmente, uma medida *fuzzy* e servem para modelar as possíveis interações entre os critérios. No contexto de MCDA, uma das dificuldades ligadas à integral de Choquet diz respeito à identificação das capacidades. De fato, esse problema, em sua formulação mais geral, é mal-posto, pois diferentes conjuntos de capacidade de Choquet podem resultar num mesmo valor após a etapa de agregação. Deste modo, torna-se necessário levar em conta algum tipo de regularização no processo de identificação das capacidades de Choquet.

Recentemente, soluções similares àquelas consideradas em problemas como *compressive sensing* [4] e aproximação esparsa de modo mais geral foram propostas no contexto de estimação das capacidades de Choquet. Mais precisamente, a ideia neste caso é utilizar a hipótese de esparsidade como um termo de regularização.

No presente trabalho, investigamos a utilização de aproximações esparsas no contexto da identificação dos parâmetros da integral de Choquet. No entanto, diferentemente dos trabalhos anteriores [5], que consideram a esparsidade no domínio da medida *fuzzy*, nossa proposta opera num outro domínio conhecido como *representação de interação* [6]. De fato, conforme será discutido ao longo do texto, assumir esparsidade no domínio da *representação de interação* é mais

Henrique E. Oliveira e João M. T. Romano, Laboratório DSPCom, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, Brasil, Leonardo T. Duarte, Faculdade de Ciências Aplicadas, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Limeira, Brasil. E-mails: henrique@decom.fee.unicamp.br, romano@fee.unicamp.br, leonardo.duarte@fca.unicamp.br.

natural, em contextos de decisão, do que considerá-la no domínio da medida *fuzzy*.

Com relação à organização do artigo, na Seção II será introduzida a integral de Choquet e será mostrado como se resolver o problema de identificação das capacidades de Choquet. Então, na Seção III, será apresentado o método proposto com o qual se resolve o problema, abordando-se a *representação de interação*. Experimentos numéricos são realizados na Seção IV, na qual se mostra a melhora nos resultados quando se trabalha com *representação de interação*, comparado com as medidas *fuzzy*. Finalmente, na Seção V, serão feitas as conclusões do trabalho.

## II. IDENTIFICAÇÃO DAS CAPACIDADES DE CHOQUET

Nessa seção, será feita uma revisão sobre a integral de Choquet. Também será apresentada a formulação utilizada para a identificação dos parâmetros da integral de Choquet, que resulta num processo de otimização quadrática. Além disso, será apresentado o problema de otimização com o termo de regularização da norma  $l_1$ .

### A. A integral de Choquet

Na Figura 1 é mostrado um processo de agregação. Nela tem-se uma matriz de decisão,  $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , onde  $n$  é o número de alternativas, pertencentes ao conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , e  $m$  é o número de critérios, pertencentes ao conjunto  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ . Cada elemento  $P_{ij}$  da matriz representa a utilidade da alternativa  $i$  com relação ao critério  $j$ . O processo de agregação, representado pelo operador de agregação  $\mathcal{F}(\cdot)$ , para uma dada alternativa  $i$  resulta em  $u_i$ , que corresponde à utilidade da alternativa  $a_i$ . Esse operador é aplicado nos critérios referentes a essa alternativa, os quais estão associados a um conjunto de parâmetros  $\mathbf{w}$ . Esses parâmetros podem representar, por exemplo, as ponderações de cada critério no processo de agregação.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nm} \end{bmatrix} \rightarrow u_i = \mathcal{F}(P_{i1}, \dots, P_{im}, \mathbf{w})$$

Fig. 1. Processo de agregação.

Os operadores de agregação devem satisfazer certos requerimentos, tais como continuidade e monotonicidade, e os mais comumente utilizados são a média, a mediana e funções de máximo ou mínimo [3]. Essas abordagens assumem que não há nenhum tipo de relação entre os critérios na etapa de agregação, o que nem sempre é verdade, pois pode haver uma forte relação entre critérios, gerando assim um viés no processo de ordenação.

A fim de se evitar que critérios relacionados enviem a ordenação das alternativas, podem ser escolhidos outros operadores de agregação, como a integral de Choquet, que vem sendo muito utilizada [3]. Matematicamente, ela é calculada para uma alternativa  $i$  do seguinte modo:

$$IC_i^\mu(P_{i1}, \dots, P_{im}) = \sum_{j=1}^m (P_{i(j)} - P_{i(j-1)})\mu(D_{(j)}), \quad (1)$$

onde o operador  $(\cdot)$  representa uma permutação da seguinte maneira  $P_{i(0)} \leq P_{i(1)} \leq P_{i(2)} \leq \dots \leq P_{i(m)}$  com  $P_{i(0)} = 0$ , de modo que o sub-conjunto de critérios é dado por  $D_{(j)} = \{c_{(j)}, \dots, c_{(m)}\}$  e  $\mu$  é uma medida *fuzzy* [7], também chamada de capacidade de Choquet, definida não somente para os critérios individuais, mas também para todos os sub-conjuntos de critérios. As capacidades de Choquet são os análogos dos pesos presentes na agregação linear, pois permitem ao usuário obter uma quantificação das importâncias de cada um dos critérios, bem como das coalizões entre os critérios [3].

As propriedades da medida *fuzzy* aplicadas no conjunto de critérios  $C$  são as seguintes:

- $\mu(\emptyset) = 0, \mu(C) = 1$
- $A \subset B \subset C$  implica  $\mu(A) \leq \mu(B)$  (monotonicidade)

A propriedade de monotonicidade significa que o fato de se adicionar um novo elemento em uma coalizão não pode diminuir o valor da capacidade para aquela coalizão [6].

A dificuldade que se apresenta para esse cenário é de como identificar todas essas medidas, uma vez que para um operador de agregação como a média ponderada temos  $m$  pesos, enquanto que para a integral de Choquet temos  $2^m - 2$  coeficientes *fuzzy*, pois sabe-se que  $\mu(\emptyset) = 0$  e  $\mu(C) = 1$  [8], [9].

### B. Aprendizado supervisionado da integral de Choquet

O presente trabalho considera uma abordagem supervisionada para identificação das capacidades de Choquet, na qual é assumido o conhecimento da matriz de decisão  $\mathbf{P}$  e do vetor de utilidades  $\mathbf{u}$ . O problema então pode ser formulado como um problema de minimização da soma dos erros quadráticos, calculados considerando a saída da integral de Choquet e a utilidade para cada uma das alternativas. Em termos matemáticos, tal problema pode ser formulado da seguinte maneira [5]:

$$\min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n (IC_i^\mu(P_{i1}, \dots, P_{im}) - u_i)^2. \quad (2)$$

Para que se consiga chegar a uma formulação canônica de um problema de otimização quadrática, deve-se fazer a seguinte expansão:

$$\min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n (\mathbf{M}_i^t \boldsymbol{\mu} - u_i)^2, \quad (3)$$

onde

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ P_{i(m)} - P_{i(m-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ P_{i(2)} - P_{i(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ P_{i(1)} - P_{i(0)} \end{bmatrix},$$

cujo tamanho é  $2^m \times 1$ . As diferenças  $P_{i(j)} - P_{i(j-1)}$ , que aparecem no vetor  $\mathbf{M}_i$ , devem estar localizadas nas mesmas posições correspondentes às de suas capacidades no vetor de capacidades, o qual foi codificado numa sequência lexicográfica, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{12}, \dots, \mu_{12\dots m}]^t,$$

também de tamanho  $2^m \times 1$ . Para simplificar a notação, assumiu-se  $\mu(\{c_i\}) = \mu_i$ . Realizando a expansão da Equação (3), chegamos ao seguinte problema de otimização quadrática:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\mu}} \quad & \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^t \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{f}^t \boldsymbol{\mu} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \leq \mathbf{s} \\ & 0 \leq \boldsymbol{\mu} \leq 1, \quad \mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(C) = 1, \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $\mathbf{Q} = 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i \mathbf{M}_i^t$  e  $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n (-2u_i \mathbf{M}_i)$ . As restrições desse problema estão relacionadas com as duas propriedades da medida *fuzzy*, apresentadas na seção II-A [5].

A grande dificuldade de se resolver esse problema é que ele é mal-posto. Uma maneira de se resolver isso é acrescentando-se um termo de regularização ao problema de otimização, de modo a promover a esparsidade na solução, como será mostrado na seção seguinte.

### C. Otimização do problema com um termo de regularização

A fim de se regularizar o problema, será acrescentado na formulação expressa na Equação (4) um termo da norma  $l_p$  do vetor de variáveis em questão. Para esse trabalho, será considerado  $p = 1$ , pois a minimização da norma  $l_1$  do vetor de variáveis tende a resultar num vetor no qual há uma proporção significativa de elementos nulos ou próximos de zero [5]. O problema então se torna:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\mu}} \quad & \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^t \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{f}^t \boldsymbol{\mu} + \lambda \|\boldsymbol{\mu}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \leq \mathbf{s} \\ & 0 \leq \boldsymbol{\mu} \leq 1, \quad \mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(C) = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro não negativo que controla a regularização.

Uma maneira de se resolver esse problema é através de um método conhecido como LASSO (do inglês, *Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) [10]. Tem-se então:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\mu}} \quad & \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}^t \mathbf{Q} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{f}^t \boldsymbol{\mu} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \leq \mathbf{s} \\ & 0 \leq \boldsymbol{\mu} \leq 1, \quad \mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(C) = 1 \\ & \|\boldsymbol{\mu}\|_1 \leq t. \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $t$  é um parâmetro de ajuste.

Uma solução muito eficiente para esse problema, conhecida como NNVM (do inglês, *Non-Negative Variable Method*) [10], consiste em linearizar a norma  $l_1$  por meio de uma representação na qual se dobra o número de variáveis de  $\boldsymbol{\mu}$ , ou seja,  $[\mu_1^+, \mu_2^+, \dots, \mu_1^-, \mu_2^-, \dots]$ , onde  $\mu_j = \mu_j^+ - \mu_j^-$ , e se acrescenta as seguintes restrições:

$$\mu_i^+ \geq 0, \mu_i^- \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^m (\mu_j^+ + \mu_j^-) \leq t.$$

A formulação expressa em (6) tende a promover soluções esparsas no vetor de capacidades de Choquet. Entretanto, a solução desse problema com o vetor de capacidades esparsos não representa com fidelidade a realidade, pois esse vetor não é esparsos, como será visto na próxima seção.

## III. MÉTODO PROPOSTO

Um caso de particular interesse para o presente trabalho é quando uma medida *fuzzy* é chamada de aditiva, ou seja, quando  $\mu(A) = \sum_{i \in A} \mu(\{i\})$  para todo  $A \subset C$  [6]. Tal situação representa o caso particular da agregação linear e, logo, pode ser vista como a expressão mais simples da integral de Choquet. Com o intuito de ilustrar a motivação da presente proposta, consideremos um exemplo de problema de decisão em que se deve avaliar as alternativas sobre 4 critérios via um processo de agregação linear no qual os pesos são dados por  $[1/4; 1/4; 1/4; 1/4]$ . Conforme discutido no parágrafo anterior, tal situação pode ser representada por uma integral de Choquet cuja medida *fuzzy* associada é aditiva. Assim, na Figura 2, apresentamos essa medida calculada para todas  $2^4 = 16$  coalizões. Como se pode verificar, é interessante notar que, mesmo numa situação simples de agregação linear, a medida *fuzzy* associada é claramente um sinal não-esparsos.

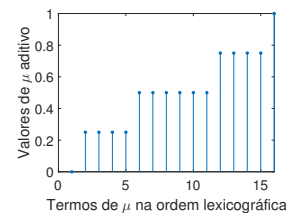


Fig. 2. Valores das capacidades de Choquet para o caso aditivo.

Motivado por tal observação, o método proposto para esse trabalho tem o objetivo de identificar as capacidades de Choquet por meio do problema de otimização visto na seção anterior, porém considerando uma representação alternativa, conhecida como *representação de interação*, na qual a esparsidade faz mais sentido [6]. Na presente seção, faremos uma breve apresentação da representação considerada e veremos

como o problema de otimização associado à estimação dos parâmetros da integral pode ser formulado nesse novo domínio transformado.

#### A. Índice de interação generalizado

Na *representação de interação*, as medidas *fuzzy* são linearmente transformadas em índices de interação generalizados. Dados os sub-conjuntos  $A \subset C$  e  $B \subset C$ , o índice de interação generalizado  $I(A)$ , definido para todas as coalizões (incluindo o conjunto vazio), é [6]:

$$I(A) = \sum_{K \subset C \setminus A} \frac{(m - |K| - |A|)! |K|!}{(m - |A| + 1)!} \times \sum_{B \subset A} (-1)^{|A| - |B|} \mu(K \cup B), \forall A \subset C, \quad (7)$$

onde  $|Z|$  representa a cardinalidade do conjunto  $Z$ . De particular interesse são os seguintes valores [6]:

- $I(\{i\}) = \phi_i$ , conhecido como o índice de Shapley, que computa a contribuição média do elemento  $i$  em todas as coalizões;
- $I(\{i, j\}) = I_{ij}$ , conhecido como índice de interação, que computa a interação entre os elementos  $i$  e  $j$ , podendo ser positiva, negativa ou zero, quando não há interação.

O índice de interação generalizado  $I$  pode ser considerado como uma transformação linear inversível. Através da Equação (7), os valores das medidas *fuzzy* podem ser encontrados da seguinte maneira [6]:

$$\mu(A) = \sum_{B \subset C} \beta_{|A \cap B|}^{|B|} I(B), \forall A \subset C, \quad (8)$$

com

$$\beta_k^l = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_{l-j}, \quad (9)$$

onde  $B_k$  são os números de Bernoulli, com os primeiros termos  $B_1 = -1/2$ ,  $B_2 = 1/6$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = -1/30$ ,  $B_5 = 0$ , etc [6].

Existem sub-classes de interesse prático conhecidas como *k-aditivas*, que naturalmente são esparsas, pois  $I(A) = 0$  para todas as coalizões de mais que  $k$  elementos. Nesse caso deve existir ao menos um  $A$  de exatamente  $k$  elementos tal que  $I(A) \neq 0$  [6]. Por exemplo, em uma medida *2-aditiva*, para todas as coalizões de três elementos ou mais,  $I(A) = 0$ .

#### B. Otimização no domínio de $\mathbf{I}$

Para se realizar a otimização quadrática no domínio de  $\mathbf{I}$ , deve-se substituir  $\mu$  da Equação (4) por  $\mathbf{T}\mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{T} = \sum_{B \subset C} \beta_{|A \cap B|}^{|B|}$  é a matriz de transformação. Nesse caso, o problema se torna:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{I}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \mathbf{Q}_i \mathbf{I} + \mathbf{f}_i^t \mathbf{I} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{R}_i \mathbf{I} \leq \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{T}^t \mathbf{Q} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}^t \mathbf{T}$  e  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R} \mathbf{T}$ .

#### C. Otimização com regularização no domínio de $\mathbf{I}$

Da mesma forma com que foi feito para o domínio de  $\mu$ , deve-se acrescentar um termo de regularização, o qual, também neste caso, será dado pela norma  $l_1$  do vetor de variáveis em questão, levando a soluções esparsas. O problema pode então ser equacionado por:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{I}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \mathbf{Q}_i \mathbf{I} + \mathbf{f}_i^t \mathbf{I} + \lambda \|\mathbf{I}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{R}_i \mathbf{I} \leq \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (11)$$

Utilizando-se o LASSO, tem-se então:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{I}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{I}^t \mathbf{Q}_i \mathbf{I} + \mathbf{f}_i^t \mathbf{I} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{R}_i \mathbf{I} \leq \mathbf{s} \\ & \|\mathbf{I}\|_1 \leq t. \end{aligned} \quad (12)$$

E aplicando-se o NNVN, tem-se o vetor de variáveis com o dobro do tamanho  $[I_1^+, I_2^+, \dots, I_1^-, I_2^-, \dots]$ , onde  $I_j = I_j^+ - I_j^-$ , e as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} I_i^+ &\geq 0, I_i^- \geq 0 \\ \sum_{j=1}^m (I_j^+ + I_j^-) &\leq t. \end{aligned}$$

#### IV. RESULTADOS

Com o objetivo de validar o método proposto, foi feito um experimento que consiste na comparação dos valores das capacidades de Choquet encontrados pelos quatro métodos de otimização quadrática descritos: no domínio de  $\mu$ , no domínio de  $\mu$  com um termo de regularização, no domínio de  $\mathbf{I}$  e no domínio de  $\mathbf{I}$  com um termo de regularização. Para se realizar as simulações, foi construída aleatoriamente uma matriz de decisão  $\mathbf{P}$  com distribuição de probabilidade uniforme, tendo 7 critérios e 100 alternativas. O vetor de utilidades  $\mathbf{u}$  foi gerado linearmente com os pesos  $[1/7; 1/7; 1/7; 1/7; 1/7; 1/7; 1/7]$  e o valor do parâmetro que controla a regularização foi  $t = 5$ . Todos os experimentos foram resolvidos com o *solver* de otimização quadrática do *Matlab*.

Na Figura 3 são mostrados os gráficos de dispersão bi-dimensional entre o vetor de utilidades  $\mathbf{u}$  e a estimativa da integral de Choquet  $\mathbf{IC}$  para os quatro cenários. Verifica-se que foi conseguido valores aceitáveis das estimativas da integral de Choquet no domínio de  $\mu$ , no domínio de  $\mathbf{I}$  e no domínio de  $\mathbf{I}$  com um termo de regularização, mas no domínio de  $\mu$  com um termo de regularização não se conseguiu valores satisfatórios. Isso mostra que não é razoável a consideração de esparsidade no domínio de  $\mu$ , como visto anteriormente. No domínio de  $\mu$ , a otimização sem regularização é capaz de explicar os dados, entretanto, dado que o problema é mal-posto, a estimativa da medida *fuzzy* não é uma aproximação do modelo utilizado para gerar os dados. Ou seja, o modelo linear deveria levar a uma medida aditiva.

Para se analisar o experimento com mais detalhes, pela Figura 4, pode-se verificar que apenas o gráfico correspondente à otimização quadrática no domínio de  $\mu$  com um termo de regularização não apresenta valores de capacidades esperados, ou seja, valores que obedecem às propriedades da medida *fuzzy*. Percebe-se que há muitos termos iguais a zero e o

motivo para isso é a restrição referente à regularização do problema, que levou à uma solução esparsa, quando na verdade ela não é.

Por último, analisando a Figura 5, que mostra os valores dos índices de interação generalizados para os quatro cenários, percebe-se que somente aquele referente à otimização quadrática no domínio de  $\mathbf{I}$  com um termo de regularização descreve de maneira correta o que era previsto. Pelo fato de os dados terem sido gerados de forma linear, com pesos iguais, os sete primeiros índices de interação generalizados (sem considerar o termo relativo ao conjunto vazio), que são os índices de Shapley, deveriam se igualar aos valores dos pesos, ou seja, deveriam se igualar a  $1/7$ . Os outros índices de interação, que descrevem as coalizões, deveriam ser todos nulos, o que pode ser visto.

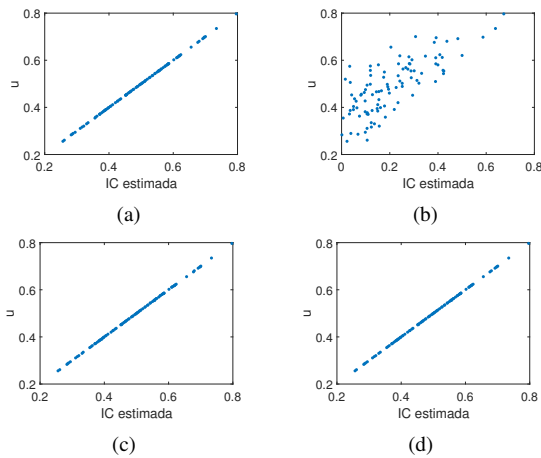


Fig. 3. Dispersão bi-dimensional entre o vetor de utilidades  $\mathbf{u}$  e a estimativa da integral de Choquet  $\mathbf{IC}$  para a otimização quadrática no domínio de: (a)  $\mu$ , (b)  $\mu$  com um termo de regularização, (c)  $\mathbf{I}$ , (d)  $\mathbf{I}$  com um termo de regularização.

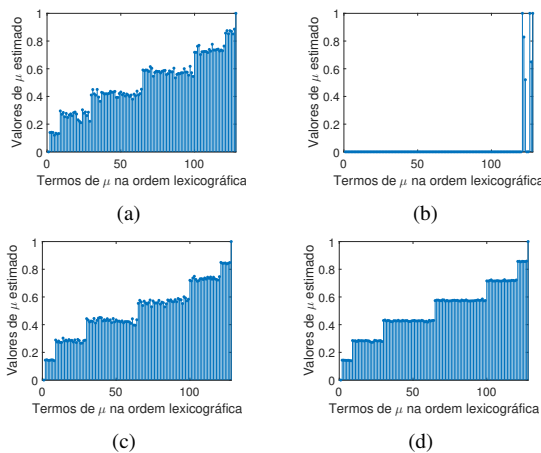


Fig. 4. Valores das capacidades de Choquet identificados na otimização quadrática no domínio de: (a)  $\mu$ , (b)  $\mu$  com um termo de regularização, (c)  $\mathbf{I}$ , (d)  $\mathbf{I}$  com um termo de regularização.

## V. CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi desenvolvido um método para a identificação de capacidades de Choquet, que se baseia em

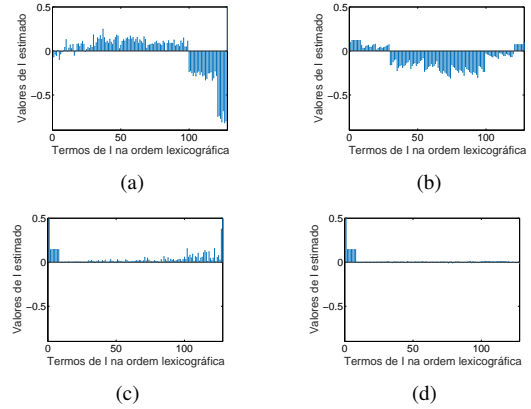


Fig. 5. Valores dos índices de interação generalizados identificados na otimização quadrática no domínio de: (a)  $\mu$ , (b)  $\mu$  com um termo de regularização, (c)  $\mathbf{I}$ , (d)  $\mathbf{I}$  com um termo de regularização.

técnicas de processamento de sinais com representações esparsas. Mais especificamente, resolvemos o problema abordando a *representação de interação*. Comparamos então a identificação realizada utilizando a *representação de interação* com a abordagem utilizando as medidas *fuzzy* e verificamos que naquele cenário conseguiu-se resultados melhores, pois a esparsidade faz mais sentido do que quando se trabalha com as medidas *fuzzy*.

## AGRADECIMENTOS

H. E. Oliveira agradece a CAPES por financiar seu doutorado, L. T. Duarte agradece a FAPESP (Processo 2015/16325-1) e os autores agradecem o CNPq por financiar suas pesquisas.

## REFERÊNCIAS

- [1] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, A. Tsoukiàs, and P. Vincke, *Evaluation and decision models with multiple criteria: Stepping stones for the analyst*. Springer Science & Business Media, 2006, vol. 86.
- [2] S. Greco, J. Figueira, and M. Ehrgott, "Multiple criteria decision analysis," *Springer's International series*, 2005.
- [3] M. Grabisch, "The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making," *European journal of operational research*, vol. 89, no. 3, pp. 445–456, 1996.
- [4] R. G. Baraniuk, "Compressive sensing [lecture notes]," *IEEE signal processing magazine*, vol. 24, no. 4, pp. 118–121, 2007.
- [5] T. A. Adeyeba, D. T. Anderson, and T. C. Havens, "Insights and characterization of  $l_1$ -norm based sparsity learning of a lexicographically encoded capacity vector for the choquet integral," in *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2015 IEEE International Conference on*. IEEE, 2015, pp. 1–7.
- [6] M. Grabisch, "A graphical interpretation of the choquet integral," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, no. 5, pp. 627–631, 2000.
- [7] J.-L. Marichal, "An axiomatic approach of the discrete choquet integral as a tool to aggregate interacting criteria," *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 8, no. 6, pp. 800–807, 2000.
- [8] H. V. Rowley, A. Geschke, and M. Lenzen, "A practical approach for estimating weights of interacting criteria from profile sets," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 272, pp. 70–88, 2015.
- [9] I. Kojadinovic, "Estimation of the weights of interacting criteria from the set of profiles by means of information-theoretic functionals," *European Journal of Operational Research*, vol. 155, no. 3, pp. 741–751, 2004.
- [10] R. Tibshirani, "Regression shrinkage and selection via the lasso," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pp. 267–288, 1996.