

Construções de Reticulados Hiperbólicos e Reticulados Algébricos via Álgebra dos Quatérnios

Cintya Wink de Oliveira Benedito

Resumo—Nesta apresentação, em homenagem ao Professor Reginaldo Palazzo Junior, que foi quem me apresentou e tanto me ajudou a trabalhar nesta temática, o objetivo é apresentar alguns resultados obtidos sobre reticulados hiperbólicos e reticulados algébricos utilizando ordens maximais dos quatérnios em uma álgebra dos quatérnios. Tais reticulados podem ser utilizados por exemplo em codificação quântica e códigos geometricamente uniformes, no caso de reticulados hiperbólicos, e em canais gaussianos e MIMO no caso de reticulados algébricos.

Palavras-Chave—Reticulados, Álgebra dos Quatérnios, Ordens Maximais.

I. INTRODUÇÃO

Um reticulado é um conjunto discreto de pontos no \mathbb{R}^n que possui estrutura de subgrupo aditivo. O conceito de reticulados está cada vez mais presente em problemas envolvendo teoria da informação. O interesse por esta teoria, no contexto dos sistemas de comunicações digitais, foi estimulado pela sua conexão com a teoria dos números, teoria de grupos e teoria da codificação. Constelações de sinais tendo a estrutura de reticulados são consideradas importantes para a transmissão de sinais pois a estrutura algébrica e geométrica dos reticulados facilita no processo de codificação e decodificação.

Na busca por novos sistemas de comunicações muitos trabalhos têm sido realizados com o objetivo de obter constelações de sinais e códigos geometricamente uniformes no plano hiperbólico.

A estrutura da álgebra dos quatérnios tem sido proposta para STBC (*Space-Time Block Code*) desde a introdução do código de Alamout para duas antenas transmissoras. No contexto de STBC, reticulados tem sido construídos usando ordens maximais em álgebra de divisão cíclica.

II. RETICULADOS HIPERBÓLICOS

Reticulados hiperbólicos completos podem ser vistos como ordens maximais dos quatérnios associados a grupos fuchsianos aritméticos. Os grupos obtidos foram construídos utilizando a ordem usual dos quatérnios $\mathcal{O} = (\theta, -1)_R$, que é caracterizada pelo anel dos inteiros $R = \mathcal{I}_{\mathbb{K}}$ e com a mesma base $\{1, i, j, k\}$ da álgebra $\mathcal{A} = (\theta, -1)_{\mathbb{K}}$ associada. A ordem usual associada a esta álgebra não é maximal para os casos tratados neste trabalho, porém, quando uma ordem maximal dos quatérnios é identificada com os elementos de um grupo fuchsiano via isomorfismo, tornando-o aritmético, temos um rotulamento completo dos pontos da constelação de sinal associada. Neste sentido, o objetivo é obter ordens

maximais dos quatérnios $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$, identificadas através de uma base, para algumas álgebras dos quatérnios as quais possibilitaram a construção de grupos fuchsianos aritméticos. Estas ordens maximais não são imediatas para os corpos de números utilizados e quanto mais aumentamos o grau das extensões destes corpos sobre os racionais, maior a complexidade para obter uma base que caracteriza estas ordens maximais.

III. RETICULADOS ALGÉBRICOS

Podemos definir reticulados algébricos via ordens maximais de uma álgebra dos quatérnios de maneira análoga como definimos reticulados algébricos via corpo de números. Ou seja, como a imagem de um homomorfismo definido de uma ordem maximal ou de um ideal desta ordem no espaço \mathbb{R}^{4n} . O objetivo é apresentar construções de reticulados algébricos utilizando ordens maximais de uma álgebra dos quatérnios definidas sobre corpos de números totalmente reais. Tais reticulados são identificados através de sua matriz de Gram e de sua matriz geradora. Com esta construção é possível obter reticulados rotacionados de dimensões múltiplas de 4 com densidade de centro ótima para algumas dimensões.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Reginaldo Palazzo Junior pela sua generosidade em transmitir conhecimento, por ser minha inspiração como pesquisador e como pessoa.

REFERÊNCIAS

- [1] C. W. O. Benedito, R. Palazzo Jr. and J. Carmelo Interlando. An Algorithm to Construct Arithmetic Fuchsian Groups derived from Quaternion Algebras and the Corresponding Hyperbolic Lattices. *Journal of Pure and Applied Algebra*, (2015), 1902–1923.
- [2] C. Q. Queiroz, C. W. O. Benedito, J. Carmelo Interlando and R. Palazzo Jr.. Complete hyperbolic lattices derived from tessellations of type $\{4g, 4g\}$, *Journal of Algebra and Its Applications*, (15), (2015), 1650157-1 – 1650157-28.
- [3] F.-T. Tu and Y. Yang. Lattice packing from quaternion algebras, *RIMS Kōkyūroku Bessatsu* (2012) 229–237.
- [4] C. Alves and J.-C. Belfiore, Lattices from maximal orders into quaternion algebras, *Journal of Pure Applied Algebra*, 219 (4) (April 2015) 687–702.