Códigos lineares via sequências de Fibonacci

Antonio Aparecido de Andrade e Agnaldo José Ferrari

***Resumo*— Neste trabalho, apresentamos construções de códigos lineares via números de Fibonacci. Inicialmente, exploramos um número especial para aqueles que admiram a matemática, chamado de número de ouro, proporção aurea ou número ϕ. O primeiro registro escrito desse número na história da matemática aparece no livro Os Elementos VI, de Euclides (século VI a.C). Em seguida, apresentamos aplicações dos números de Fibonacci na teoria da informação e codificação.**

***Palavras-Chave*— Número de ouro, Números de Fibonacci, Formula de Cassini, Códigos lineares, .**

***Abstract*— In this work, we present linear code constructions via Fibonacci numbers. Initially, we explored a special number for those who admire the mathematics, called the gold number, the golden ratio, or the number ϕ. The first written record of this number in the history of mathematics appears in Euclid's book The Elements VI (6th century BC). Next, we present applications of Fibonacci numbers in information theory and coding.**

***Keywords*— Golden number, Fibonacci numbers, Cassini formula, Linear codes.**

I. INTRODUÇÃO

O número ϕ aparece em inúmeras e inesperadas situações, na ciência, nas artes, nas coisas naturais e sobrenaturais. Outro número interessante foi descoberto séculos após Euclides por um matemático chamado Leonardo que, sendo morador de Pisa, era conhecido como Leonardo de Pisa. E, como nascera de família de boa estirpe, ficou também conhecido como Fibonacci, que significa, literalmente, filho de boa gente. Fibonacci publicou, em 1202, um livro chamado Livro dos Ábacos onde tratava de vários temas matemáticos que considerava como importantes. Um deles tratava do problema de calcular quantos coelhos poderiam ser produzidos em um ano, a partir de um único casal. Da forma como enunciado por Fibonacci, o problema é muito artificial. Supõe que cada casal leva um mês, após nascer, para ficar fértil, gera sempre outro casal a cada mês e nenhum coelho morre durante o ano, ou seja, obtem a conhecida sequência de Fibonacci que representa a quantidade de coelhos em cada mês $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$

A sequência de Fibonacci a partir do terceiro termo, cada termo é função dos dois termos anteriores, ou seja,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

onde $n \geq 1$. A sequência de Fibonacci não é a única sequência que satisfaz essa fórmula recursiva, ou seja, existem uma infinidade de outras sequências que também a satisfaz. Além disso,

$$\phi^n = \phi F_n + F_{n-1},$$

para $n \geq 2$, e o matemático F. Edouard A. Lucas (1842-1891) provou, em 1876, que o máximo dividor comum de dois números de Fibonacci é um outro número de Fibonacci. ou seja, $mdc(F_m, F_n) = F_{mdc(m,n)}$.

A teoria dos códigos pode ser explorada via a matriz Fibonacci. Em contraste com os códigos clássicos, uma peculiaridade do método é que permite corrigir os elementos da matriz que podem ser inteiros teoricamente ilimitados. No caso mais simples a capacidade de correção do método excede os de muitos códigos conhecidos. A idéia principal da detecção e correção de erros é baseado na propriedade dos determinantes da matriz inicial e da matriz código e sobre as conexões entre os elementos da matriz código.

Na Seção II, apresentamos o número ϕ juntamente om suas principais propriedades. Na Seção III, apresentamos os números de Fibonacci e a formula de Cassini. Na Seção IV, apresentamos os p-números de Fibonacci e a expansão da formula de Cassini. Na Seção V, apresentamos as matrizes de Fibonacci juntamente com suas principais propriedades. Na Seção VI, apresentamos um método de codificação e de decodificação de códigos lineares via matrizes de Fibonacci de ordem 2. Na Seção VII, baseado na Seções V e VI, apresentamos um algoritmo de codificação e de decodificação de códigos lineares via as matrizes de Fiboanacci. Na Seção VIII, apresentamos nossas conclusões do trabalho.

II. NÚMERO ϕ

Uma das referências mais antigas ao número de ouro se encontra no livro *Os elementos VI*, de Euclides. Neste livro, Euclides trata do problema de seccionar um segmento em média e extrema razão, ou seja,

> *Dado um segmento AB, um ponto C divide este segmento em média e extrema razão se o mais longo dos segmentos é a média geométrica entre o menor e o segmento todo.*

O problema proposto por Euclides consistia na idéia de que dado um segmento de reta AB queremos encontrar um ponto C que o divida em média e extrema razão, ou seja, considerando o segmento

Antonio Aparecido de Andrade¸ Departamento de Matemática, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto - SP, Brasil, E-mail: andrade@ibilce.unesp.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fapesp (2013/25977-7. Agnaldo José Ferrari, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru - SP, Brasil, E-mail: ferrari@fc.unesp.br.

queremos determinar o ponto C de modo que a seguinte igualdade seja satisfeita:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Sejam $b, a, a + b$ as medidas dos segmentos CB, AC e AB, respectivamente. Buscamos, então, a razão da progressão geométrica $(b, a, a + b)$. Assim,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}, \quad \text{ou seja,} \quad a^2 - ab - b^2 = 0.$$

Colocando a em função de b e resolvendo a equação de grau 2, obtemos os seguintes valores:

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}b$$

ou

$$a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}b,$$

onde encontramos dois valores para a razão $\frac{AB}{AC}$. O primeiro é chamado ϕ, enquanto o segundo φ, ou seja,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{a+b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

e

$$\frac{AC}{CB} = \frac{a}{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

O valor positivo da razão ϕ é chamado número de ouro, divina proporção, número áureo, razão áurea, dentre outros nomes. Atribui-se a esse número a letra grega ϕ em homenagem ao escultor grego Fídias (490-430 a.C.), que utilizava tal razão em seus trabalhos. Além disso, observamos que $\overline{\phi} = \varphi$, uma vez que

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343 65...$$

$$\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6180339887498948482045868343 65...$$

Note que ϕ e seu conjugado possuem os mesmos algarismos decimais. Embora curiosa tal característica não é exclusiva do número de ouro. Observamos ainda que a soma de ϕ com seu conjugado $\overline{\phi}$ é igual a 1. Relacionamos ϕ e seu conjugado $\overline{\phi}$ através da verificação de que o inverso de um é igual ao oposto do outro, ou seja,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = -\varphi \Rightarrow \frac{1}{\phi} = -\varphi.$$

Se considerarmos o segmento CB com comprimento igual a 1 vemos que o número de ouro é uma raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$, ou seja, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Além disso,

$$\phi^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ou ainda, $\phi^2 = \phi + 1$, o que nos diz que seu quadrado é igual a ele próprio mais uma unidade

$$\phi^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da equação $\phi^2 = \phi + 1$, segue que $\phi = \sqrt{1+\phi}$ e, usando recursivamente tal resultado, segue que

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1\sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}}$$

Agora, dividindo a equação $\phi^2 = \phi + 1$ por ϕ, segue que o número de ouro é igual a seu inverso somado com 1, ou seja,

$$\phi = \frac{\phi+1}{\phi} = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Finalmente, dividindo a equação $\phi^2 = \phi + 1$ por ϕ em ambos os lados da equaçãoe utilizando recursivamente este resultado, segue que

$$\phi = \frac{\phi+1}{\phi} = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

III. NÚNEROS DE FIBONACCI E FÓRMULA DE CASSINI.

Leonardo de Pisa (1170-1250) foi um matemático italiano de grande importância para teoria de números. Apelidado Fibonacci (filho de boa natureza) destacou-se principalmente por sua obra *Liber Abacci*, onde se encontra o mais famoso dos problemas propostos e resolvidos por ele. Trata-se do problema de calcular quantos coelhos poderiam ser produzidos em um ano, a partir de um único casal se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês. É claro que da forma como enunciado por Fibonacci, o problema é muito artificial.

No mês inicial o primeiro casal ainda é infértil. No mês seguinte o casal está fértil e um novo casal é gerado. Portanto, durante o segundo mês, teremos dois casais, o original e um novo, sendo este último ainda infértil. No terceiro mês, o casal original gera mais um casal e o segundo casal fica fértil. Portanto, nesse terceiro mês teremos três casais. Agora, os dois primeiros casais estão férteis e cada um gera um novo casal. E assim por diante. Mais detalhadamente, vemos que o resultado é uma sequência de números em que cada um deles é obtido pela soma dos dois números imediatamente anteriores.

A sequência $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$, onde $F_0 = 0$, é chamada de Sequência de Fibonacci, cujos valores representam a quantidade de coelhos em cada mês.

Sejam o número 5 pertencente a sequência e seu quadrado $5^2 = 25$. Multiplicando os dois números de Fibonacci, 3 e 8, que circundam o número 5, segue que $3 \times 8 = 24$, e assim,

$$5^2 - 3 \times 8 = 25 - 24 = 1,$$

onde a diferença é igual a 1.

Realizarmos o mesmo processo para o próximo número da sequência, 8. Primeiramente consideremos seu quadrado,

$8^2 = 64$ e depois, multiplicamos os dois números de Fibonacci adjacentes a 8 na sequência, ou seja, $5 \times 13 = 65$. Após uma comparação entre os resultados podemos escrever

$$8^2 - 5 \times 13 = 64 - 65 = -1,$$

onde a diferença é igual a -1. Repetindo tal processo para os próximos números, segue que $13^2 - 8 \times 21 = 169 - 168 = 1$ e $21^2 - 13 \times 34 = 441 - 442 = -1$, e assim por diante.

O quadrado de qualquer número de Fibonacci F_n difere a partir do produto de dois números adjacentes F_{n-1} e F_{n+1} por 1. No entanto, o sinal de 1 depende do índice n do número de Fibonacci F_n. Se o índice n é par, então o número 1 recebe o sinal negativo e, se ímpar, positivo. Essa propriedade dos números de Fibonacci pode ser expressa, de maneira geral, por

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1},$$

denominada Fórmula de Cassini, em honra ao astrônomo Giovanni Cassini (1625-1712). Além disso, os termos da sequência de Fibonacci satisfazem a seguinte identidade

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Generalizações da sequência de Fibonacci foram propostas, onde as razões entre termos sucessivos de várias delas também convergem para certos números, denominados constantes Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci, etc, que são, neste sentido, generalizações do número de ouro. Embora haja muitas interpretações e propriedades para o número ϕ, o mesmo não pode ser dito para estas outras constantes, denominadas de constantes n-bonacci.

IV. P-NÚMEROS DE FIBONACCI E A EXPANSÃO DA FÓRMULA DE CASSINI.

Durante séculos, acreditava-se que os números de Fibonacci eram os únicos números que satisfaziam a propriedade matemática dada pela fórmula de Cassini. No final do século XX e início do século XXI desenvolveu-se um estudo sobre uma nova classe de sequências numéricas recursivas, que são uma generalização dos números de Fibonacci clássicos. Considere um número $p \in \mathbb{R}$ e a seguinte relação de recorrência

$$F_p(n+2) = pF_p(n+1) + F_p(n),$$

onde $F_p(0) = 0$ e $F_p(1) = 1$, para todo $p \in \mathbb{R}$, que fornece um número infinito de novas sequências numéricas.

Para $p = 1$, a relação de recorrência é dada por

$$F_1(n+2) = F_1(n+1) + F_1(n)$$

e gera os seguintes números de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$. Para $p = 2$ a relação de recorrência é dada por

$$F_2(n+2) = 2F_2(n+1) + F_2(n),$$

gerando a sequência dos chamados números de Pelly $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \cdots$.

Os p-números de Fibonacci têm muitas propriedades notáveis, semelhantes as propriedades dos números de Fibonacci clássicos. Uma delas é a de que tais números, assim como os clássicos, podem serem expandidos para valores negativos de n.

Para o caso $p = 3$, segue que $F_3(0) = 0, F_3(1) = 1, F_3(2) = 3, F_3(3) = 10, F_3(4) = 33, F_3(5) = 109, \cdots$ e $F_3(0) = 0, F_3(-1) = 1, F_3(-2) = -3, F_3(-3) = 10, F_3(-4) = -33, F_3(-5) = 109, \cdots$ Para o caso $p = 4$, segue que $F_4(0) = 0, F_4(1) = 1, F_4(2) = 4, F_4(3) = 17, F_4(4) = 72, F_4(5) = 305, \cdots$ e $F_4(0) = 0, F_4(-1) = 1, F_4(-2) = -4, F_4(-3) = 17, F_4(-4) = -72, F_4(-5) = 305, \cdots$

Finalmente, a fórmula de Cassini para os p-números de Fibonacci é dada por

$$F_p^2(n) - F_p(n-1)F_p(n+1) = (-1)^{n+1}.$$

V. MATRIZ DE FIBONACCI.

A matriz de Fibonacci, denotada por Q_p-matriz, onde $p \in \mathbb{N}$, é dada por

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

sendo uma matriz quadrada de ordem $p + 1$. Observe que a matriz contém uma matriz identidade de ordem p excluindo a primeira coluna e a última linha, sendo que ambas possuem em suas primeiras entradas o número 1. Para os casos $p = 0, 1, 2, 3$, respectivamente, segue as seguintes matrizes

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em geral,

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \ddots & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p) \end{pmatrix},$$

onde $F_p(n)$ são p-números de Fibonacci. Quando $p = 1$, a matriz é denominada matriz de Fibonacci. Para a matriz Fibonacci, segue as seguintes propriedades.

1) Para a matriz Fibonacci $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, segue que

i) $Q_1^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$

ii) $det(Q_1^n) = (-1)^n = Q_1^{n-1} + Q_1^{n-2}$.

A matriz Q_1^n, quando $n < 0$, é definida por

i) Se n é par, $n = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$, então

$$Q_1^n = Q_1^{(-2k)} = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & -F_{2k} \\ -F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}.$$

ii) Se n é ímpar, $n = 2k+1$, com $k \in \mathbb{Z}$, então

$$Q_1^n = Q_1^{-(2k+1)} = \begin{pmatrix} -F_{2k} & F_{2k+1} \\ F_{2k+1} & -F_{2k+2} \end{pmatrix}.$$

VI. Método de Codificação e Decodificação de Fibonacci.

Nesta seção, apresentamos um método de codificação e decodificação através da matriz de Fibonacci, onde os códigos possuem entradas inteiras positivas, chamado Método de Codificação e Decodificação de Fibonacci.

Em contraste com os códigos clássicos, uma peculiaridade desse método é que permite corrigir os elementos da matriz que podem ser inteiros teoricamente ilimitados. No caso mais simples a capacidade de correção desse método excede os de muitos códigos conhecidos.

A ideia principal da detecção e correção de erros é baseada na propriedade dos determinantes da matriz inicial, da matriz código e sobre as conexões entre os elementos da matriz código.

A seguir apresentaremos algumas conecções entre os elementos da matriz código e a matriz inicial, e descrevemos o método.

Seja uma mensagem inicial descrita em uma matriz quadrada de ordem 2. Seja B uma matriz com entradas inteiras positivas, ou seja,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

uma mensagem e $n \in \mathbb{N}$. Determinamos (processo de codificação) a matriz E chamada matriz código através do produto

$$E = BQ_1^n = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}$$

e a transformação (processo de decodificação) dado por

$$B = EQ_1^{-n} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} Q_1^{-n}.$$

Para o caso em que n é ímpar, utilizamos a matriz segundo a definição, e assim,

$$B = EQ_1^{-n} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_{n-1} & F_n \\ F_n & -F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Assim, os elementos da matriz B podem serem calculados segundo o sistema

$$\begin{cases} b_1 &= -F_{n-1}e_1 + F_ne_2 \\ b_2 &= F_ne_1 - F_{n+1}e_2 \\ b_3 &= -F_{n-1}e_3 + F_ne_4 \\ b_4 &= F_ne_3 - F_{n+1}e_4 \end{cases}$$

Como os elementos da matriz B são inteiros não negativos, segue que $b_i > 0$, para $i = 1, \cdots, 4$. Assim,

$$\begin{cases} b_1 &= -F_{n-1}e_1 + F_ne_2 > 0 \\ b_2 &= F_ne_1 - F_{n+1}e_2 > 0 \\ b_3 &= -F_{n-1}e_3 + F_ne_4 > 0 \\ b_4 &= F_ne_3 - F_{n+1}e_4 > 0. \end{cases}$$

Da primeira equação, segue que $-F_{n-1}e_1 + F_ne_2 > 0$ e, após algumas manipulações algébricas, concluímos que

$$\frac{F_n}{F_{n-1}}e_2 > e_1.$$

Por outro lado, da segunda equação, $F_ne_1 - F_{n-1}e_2 > 0$, o que nos permite concluir que

$$e_1 > \frac{F_{n+1}}{F_n}e_2,$$

ou seja,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}e_2 < e_1 < \frac{F_n}{F_{n-1}}e_2 \Leftrightarrow \frac{F_{n+1}}{F_n} < \frac{e_1}{e_2} < \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Analogamente, segue que

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} < \frac{e_3}{e_4} < \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Como a razão entre dois números de Fibonacci adjacentes converge para ϕ, segue que

$$e_1 \approx \phi e_2 \quad \text{e} \quad e_3 \approx \phi e_4.$$

Para o caso em que n é par, utilizamos o mesmo processo e analogamente, segue que

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{pmatrix},$$

Assim,

$$\begin{cases} b_1 &= F_{n-1}e_1 - F_ne_2 > 0 \\ b_2 &= -F_ne_1 + F_{n+1}e_2 > 0 \\ b_3 &= F_{n-1}e_3 - F_ne_4 > 0 \\ b_4 &= -F_ne_3 + F_{n+1}e_2 > 0. \end{cases}$$

A partir de manipulações algébricas semelhantes ao caso de n impar, segue que

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} < \frac{e_1}{e_2} < \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ e } \frac{F_n}{F_{n-1}} < \frac{e_3}{e_4} < \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

VII. Algoritmo

Após determinarmos algumas relações entre os elementos da matriz código e a matriz inicial podemos descrever para o método de Codificação/Decodificação de Fibonacci alguns conceitos referentes a correção de erros.

Uma vez transmitido a matriz código E e calculado o determinante da matriz inicial B, utilizamos a relação dos determinantes para verificar possíveis erros. Num caso inicial consideramos a possibilidade de existência de erro em uma das entradas da matriz E. Assim, temos as seguintes possibilidades

$$\begin{pmatrix} x & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 & y \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ z & e_4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & t \end{pmatrix}.$$

onde x, y, z, t representam os possíveis elementos destruídos. Assim,

$$\begin{cases} xe_4 - e_2e_3 &= (-1)^n det(B) \\ e_1e_4 - ye_3 &= (-1)^n det(B) \\ e_1e_4 - e_2z &= (-1)^n det(B) \\ e_1t - e_2e_3 &= (-1)^n det(B) \end{cases}$$

onde n é o valor do expoente da matriz Q_p. Logo, os quatro possíveis eventuais erros são dados por

$$x = \frac{(-1)^n det(B) + e_2 e_3}{e_4}, \; y = \frac{-(-1)^n det(B) + e_1 e_4}{e_3},$$

$$z = \frac{-(-1)^n det(B) + e_1 e_4}{e_2} \text{ e } t = \frac{(-1)^n det(B) + e_2 e_3}{e_1}.$$

De maneira análoga verificamos todas as hipóteses de erros duplos na matriz código E. Assim, se

$$\begin{pmatrix} x & y \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}$$

representa um erro duplo, então $xe_4 - ye_3 = (-1)^n det(B)$. Note que a equação

$$xe_4 - ye_3 = (-1)^n det(B)$$

é uma equação Diofantina, e assim, admite infinitas soluções, uma vez que possui uma, $x = e_1$ e $y = e_2$. Porém, de acordo com a relação entre os elementos da matriz, $x \approx \phi y$, restringindo as possibilidades de soluções.

A abordagem para correção de erros triplos é também baseada em hipóteses sobre erros na matriz código utilizando as relações

a) $det(E) = (-1)^n det(B)$;
b) $e_1 \approx \phi e_2$;
c) $e_3 \approx \phi e_4$;
d) e o fato de que os elementos da matriz código são números inteiros.

Caso todas as soluções não convergirem para soluções inteiras isso significa que o elemento de verificação $det(B)$ está errado, ou que a matriz código apresenta erro total. Neste caso, a matriz código E é rejeitado e tratada como código defeituoso ou incorrigível.

Note que para uma matriz de ordem 2 existe a possibilidade de 15 erros, sendo 4 erros simples, 6 erros duplos, 4 erros triplos e 1 erro total. Dos quais 14 apresentam possibilidade de correção. Isso proporciona ao método de codificação/decodificação de Fibonacci uma possibilidade de correção de $\frac{14}{15}$, ou seja, cerca de 93 por cento.

VIII. Conclusões

No presente trabalho tratamos da obtenção de um algoritmo para codificação e decodificação de códigos lineares, onde as palavras códigos são matrizes de ordem dois cujas entradas são elementos de Fibonacci. A correção de erros neste caso é, em geral, melhor que quando usamos códigos via corpos finitos. Detalhes relevantes da metodologia da construção do algoritmo são descritos e os principais parâmetros envolvidos são dados via números de Fibonacci. Finalmente, uma comparação entre os algoritmos via números de Fibonacci e corpos finitos é descrita.

É notável a grandiosidade de resultados aos quais o número ϕi se associa. Um dos mais conhecidos é verificado na sequência de Fibonacci, cuja razão entre dois termos consecutivos é um número cada vez mais próximo do número phi quanto maior for a ordem dos termos tomados. Outra associação é o fato de que esse número foi estudado e utilizado em criações pelo artista renascentista Leonardo da Vinci (1452-1519), que o considerava a proporção divina, e por Roger Penrose (1931-), físico-matemático inglês e professor emérito de matemática da Universidade de Oxford, em seus estudos de ladrilhamento do plano.

A abordagem para correção de erros duplos e triplos, assim como para o método de Codificação e Decodificação via números de Fibonacci, é também baseada em hipóteses sobre erros na matriz código utilizando as relações entre os elementos e o determinante da matriz.

Referências

[1] M. E. G. Alencar, *O número phi e a sequência de Fibonacci*, Física na escola, v. 5, n. 2, 2004.
[2] A. P. STAKOV, *Fibonacci matrices, generalization of the Cassini formula, and a new coding theory*, Chaos Solitons and Fractais, v. 30, pp. 56-66, 2006.
[3] M. BASU and B. PRASAD, *The generalized relations among the code elements for Fibonacci coding theory*, Chaos Solitons and Fractais, v. 41, pp. 2517-2525, 2005.